Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades

por

Pierre-Simon Laplace

Traducción de

Emilio Mêndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: *A Philosophical Essay on Probabilities*

Primera edición: JOHN WILEY & SONS, 1902

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Este ensayo filosófico es el desarrollo de una lección sobre probabilidades que impartí en 1795 a las escuelas normales cuando fui llamado a ser, por decreto de la Convención Nacional, profesor de matemáticas junto con Lagrange. Recientemente he publicado un trabajo sobre el mismo tema llamado *Teoría analítica de las probabilidades*. Aquí presento, sin recurrir al análisis, los principios y resultados generales de esta teoría, aplicándolos a las cuestiones más importantes de la vida, que en realidad son, la mayor parte del tiempo, únicamente problemas de probabilidad. Estrictamente hablando, puede decirse que casi todo nuestro conocimiento es problemático, y que en el pequeño número de cosas que somos capaces de conocer con certeza, incluso en las propias ciencias matemáticas, los principales medios para determinar la verdad – la inducción y la analogía – están basados en probabilidades, de tal suerte que todo el sistema del conocimiento humano está conectado con la teoría expuesta en este ensayo. Sin lugar a dudas, aquí se verá con interés que al considerar, incluso en los eternos principios de la razón, la justicia, y la humanidad, solamente las posibilidades favorables que constantemente se les agregan, hay una gran ventaja en seguir estos principios y un serio inconveniente en apartarse de ellos; sus posibilidades, como aquellas favorables a las loterías, siempre terminan por prevalecer en medio de las vacilaciones del riesgo. Espero que las reflexiones ofrecidas en este ensayo atraigan la atención de los filósofos y los dirijan a un tema tan digno de ocupar sus mentes.

CAPÍTULO II

ACERCA DE LA PROBABILIDAD

Todos los eventos, incluso aquellos que a causa de su insignificancia no parecen seguir las grandes leyes de la naturaleza, son el resultado de ella justo tan necesariamente como las revoluciones del sol. Ante la ignorancia de los lazos que unen tales eventos con todo el sistema del universo, se les ha hecho depender de causas finales o del azar, dependiendo de si ocurren y se repiten con regularidad o si aparecen sin respecto al orden; pero estas causas imaginarias han retrocedido gradualmente ante los crecientes límites del conocimiento y han desaparecido por completo ante la sana filosofía, que sólo ve en ellas la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas.

Los eventos presentes están conectados con los anteriores por un vínculo basado en el evidente principio de que una cosa no puede ocurrir sin una causa que la produzca. Este axioma, conocido como *el principio de razón suficiente,* se extiende incluso a las acciones que se consideran indiferentes; la voluntad más libre es incapaz sin un motivo determinativo que le dé nacimiento. Si asumimos dos posiciones con exactamente circunstancias similares y descubrimos que la voluntad está activa en una e inactiva en la otra, decimos que su elección es un efecto sin causa. Entonces es, dice Leibniz, el ciego azar de los epicúreos. La opinión contraria es una ilusión de la mente que, perdiendo de vista las evasivas razones de la elección de la voluntad en cosas indiferentes, cree que la elección está determinada por sí misma y sin motivos algunos.

Es entonces que debemos considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del estado que ha de seguir. Dada por un instante una inteligencia que pudiese comprender todas las fuerzas por las que la naturaleza es animada y la respectiva situación de los seres que la componen – una inteligencia suficientemente vasta como para someter estos datos al análisis – divisaría, en la misma fórmula, los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y aquellos del átomo más ligero; para ella nada sería incierto, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. La mente humana ofrece, en la perfección que ha permitido dar a la astronomía, una idea débil de esta inteligencia. Sus descubrimientos en la mecánica y en la geometría, añadidos a los de la gravitación universal, le han permitido comprender, en las mismas expresiones analíticas, los estados pasado y futuro del sistema del mundo. Aplicando el mismo método a otros objetos de su conocimiento, ha conseguido referir los fenómenos observados a leyes generales y prever aquellos que determinadas circunstancias deben producir. Todos estos esfuerzos en la búsqueda de la verdad tienden a reconducirla continuamente a la vasta inteligencia que recién mencionamos, pero de la que siempre permanecerá infinitamente apartada. Esta tendencia, peculiar a la raza humana, es la que la hace superior a los animales, y sus progresos en este aspecto distinguen las naciones y las épocas y constituyen su verdadera gloria.

Recordemos que antes, y en una época no muy remota, una lluvia inusual o una sequía extrema, un cometa con una cola muy larga, los eclipses, la aurora boreal, y en general todos los fenómenos inusuales eran considerados como otras tantas señales de la ira celestial. Se invocaba al cielo para evitar su perniciosa influencia. Nadie rezaba para que los planetas y el sol detuvieran sus cursos; la observación pronto evidenció la futilidad de tales rezos. Pero como estos fenómenos, ocurriendo y desapareciendo por grandes intervalos, parecían oponerse al orden de la naturaleza, se suponía que el cielo, irritado por los crímenes terrenales, los había creado para anunciar su venganza. Así, la larga cola del cometa de 1456 sembró el terror por Europa, ya consternada por el rápido éxito de los turcos, quienes recién habían derrocado al Bajo Imperio. Después de cuatro revoluciones, esta estrella ha despertado en nosotros un interés muy distinto. El conocimiento de las leyes del sistema del mundo adquirido en el intervalo ha disipado los miedos engendrados por la ignorancia de la verdadera relación del hombre con el universo, y Halley, habiendo reconocido la identidad de este cometa con los de los años 1531, 1607, y 1682, anunció su próximo retorno para finales del año 1758 o comienzos del año 1759. El mundo instruido esperó con impaciencia este regreso que habría de confirmar uno de los mayores descubrimientos que se hayan hecho en las ciencias, y que cumplió la predicción de Séneca cuando dijo, al hablar de las revoluciones de las estrellas que caen desde una enorme altura, “Llegará el día en que, por el estudio perseguido a través de los siglos, las cosas ahora ocultas serán evidentes, y la posteridad estará asombrada de que verdades tan claras se nos hayan escapado.” Entonces Clairaut analizó las perturbaciones que había experimentado el cometa por la acción de los dos grandes planetas, Júpiter y Saturno, y después de inmensos cálculos fijó su siguiente paso en el perihelio hacia los comienzos de abril de 1759, lo que fue verificado por la observación. La regularidad que nos muestra la astronomía en los movimientos de los cometas sin duda también existe en todos los fenómenos.

La curva descrita por una simple molécula de aire o de vapor está regulada de una manera tan cierta como las órbitas planetarias, y la única diferencia entre ellas viene de nuestra ignorancia.

La probabilidad es relativa en parte a esta ignorancia y en parte a nuestro conocimiento. Sabemos que, de tres o de un número mayor de eventos, uno solo debe ocurrir, pero nada nos induce a creer que ocurrirá uno de ellos en lugar de los otros. En este estado de indecisión nos es imposible anunciar su ocurrencia con certeza. Sin embargo, es probable que uno de estos eventos, elegido a voluntad, no ocurra porque vemos varios casos igualmente posibles que excluyen su ocurrencia, y uno solo que la favorece.

La teoría del azar consiste en reducir todos los eventos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, a [casos] tales que podemos estar igualmente indecisos con respecto a su existencia, y en determinar el número de casos favorables al evento cuya probabilidad buscamos. La proporción de este número con el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que es así simplemente una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles.

La noción anterior de probabilidad supone que, al aumentar en la misma proporción el número de casos favorables y el de todos los casos posibles, la probabilidad sigue siendo la misma. Para convencernos de esto consideremos dos urnas, A y B, la primera conteniendo cuatro bolas blancas y dos negras, y la segunda conteniendo solamente dos bolas blancas y una negra. Podemos imaginar que las dos bolas negras de la primera urna están unidas por un hilo que se rompe en el momento de querer sacar una de ellas, y las cuatro bolas blancas forman así dos sistemas similares. Todas las probabilidades que favorecerán la toma de una de las bolas del sistema negro conducirán a una bola negra. Si ahora concebimos que los hilos que unen las bolas no se rompen en absoluto, es claro que el número de casos posibles no cambiará más que el de los casos favorables a la extracción de las bolas negras, pero se sacarán dos bolas de la urna al mismo tiempo; la probabilidad de sacar una bola negra de la urna A será entonces la misma que al principio. Pero obviamente tenemos el caso de la urna B con la única diferencia de que las tres bolas de esta última urna serían remplazadas por tres sistemas de dos bolas invariablemente conectadas.

Cuando todos los casos son favorables a un evento, la probabilidad cambia a la certeza y su expresión se vuelve igual a la unidad. Sobre esta condición, la certeza y la probabilidad son comparables, aunque puede haber una diferencia esencial entre los dos estados de la mente cuando una verdad le es rigurosamente demostrada o cuando aún percibe una pequeña fuente de error.

En las cosas que son sólo probables, la diferencia de los datos que cada hombre tiene con respecto a ellas es una de las principales causas de la diversidad de opiniones que prevalecen con respecto a los mismos objetos. Supongamos, por ejemplo, que tenemos tres urnas, A, B, y C, una de las cuales contiene únicamente bolas negras y las otras dos contienen únicamente bolas blancas; ha de sacarse una bola de la urna C y se requiere la probabilidad de que sea negra. Si no sabemos cuál de las tres urnas contiene únicamente bolas negras, de tal forma que no haya razón para creer que es C en lugar de B o A, estas tres hipótesis parecerán igualmente posibles, y como puede sacarse una bola negra sólo en la primera hipótesis, la probabilidad de sacarla es igual a un tercio. Si se sabe que la urna A contiene solamente bolas blancas, entonces la indecisión se extiende únicamente a las urnas B y C, y la probabilidad de que la bola sacada de la urna C sea negra es un medio. Finalmente esta probabilidad se transforma en certeza si estamos seguros de que las urnas A y B contienen sólo bolas blancas.

Es así que un incidente relacionado con una asamblea numerosa encuentra diversos grados de creencia dependiendo de la extensión de conocimiento de los oyentes. Si el hombre que lo reporta está plenamente convencido de él y si, por su posición y carácter, inspira gran confianza, su declaración – no obstante qué tan extraordinaria pueda ser – tendrá, para los oyentes que no tienen información, el mismo grado de probabilidad que una declaración ordinaria hecha por el mismo hombre, y tendrán plena fe en ella. Pero si alguno de ellos sabe que el mismo incidente es rechazado por otro hombre igualmente digno de confianza, estará dudoso y el incidente será desacreditado por los oyentes ilustrados, quienes lo rechazarán en aras de hechos bien verificados o en aras de las inmutables leyes de la naturaleza.

Es a la influencia de la opinión de aquellos a los que la multitud juzga como mejor informados y a quienes comúnmente se les ha dado confianza con respecto a los asuntos más importantes de la vida que se debe la propagación de aquellos errores que, en tiempos de ignorancia, han cubierto la faz de la Tierra. La magia y la astrología nos ofrecen dos grandes ejemplos. Estos errores inculcados en la infancia, adoptados sin examen alguno, y teniendo por base únicamente el crédito universal, se han mantenido durante un largo tiempo; pero por fin el progreso de la ciencia los ha destruido en las mentes de los hombres ilustrados, cuya opinión consecuentemente los ha hecho desaparecer incluso entre la plebe a través del poder de la imitación y del hábito, que los había esparcido originalmente. Este poder, el recurso más rico del mundo moral, establece y conserva en toda una nación ideas completamente contrarias a aquellas que sostiene en otros lados con la misma autoridad. ¡Qué indulgencia no deberíamos de tener por opiniones distintas de las nuestras cuando esta diferencia a menudo depende de los distintos puntos de vista donde las circunstancias nos han puesto! Iluminemos a aquellos que juzgamos insuficientemente instruidos, pero antes examinemos críticamente nuestras propias opiniones y ponderemos con imparcialidad sus respectivas probabilidades.

La diferencia de opiniones depende, no obstante, de la manera en la que se determina la influencia de datos conocidos. La teoría de las probabilidades guarda relación con consideraciones tan delicadas que no es sorprendente que con los mismos datos dos personas lleguen a distintos resultados, especialmente en cuestiones muy complicadas. Examinemos ahora los principios generales de esta teoría.

CAPÍTULO III

LOS PRINCIPIOS GENERALES DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Primer principio. El primero de estos principios es la propia definición de probabilidad, que es, como ya vimos, la proporción del número de casos favorables al de todos los casos posibles.

Segundo principio. Pero ello supone los varios casos igualmente posibles. Si no son así, primero determinaremos sus respectivas posibilidades, cuya apreciación exacta es uno de los puntos más delicados de la teoría del azar. Entonces la probabilidad será la suma de las posibilidades de cada caso favorable. Ilustremos este principio con un ejemplo.

Supongamos que arrojamos al aire una moneda grande y muy delgada cuyos dos grandes lados opuestos, que llamaremos cara y cruz, son perfectamente similares. Encontremos la probabilidad de sacar cara por lo menos una vez en dos tiradas. Es claro que pueden surgir cuatro casos igualmente posibles, a saber, cara en el primero y en el segundo lanzamientos; cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo; cruz en el primer lanzamiento y cara en el segundo, y finalmente cruz en ambos lanzamientos. Los primeros tres casos son favorables al evento cuya probabilidad buscamos; consecuentemente, esta probabilidad es igual a $\frac{3}{4}$, así que es una apuesta de tres a uno que salga cara por lo menos una vez en dos lanzamientos.

En este juego podemos contar sólo tres casos distintos, a saber, cara en el primer lanzamiento, lo que exime de arrojar una segunda vez; cruz en el primer lanzamiento y cara en el segundo, y finalmente cruz en el primero y en el segundo lanzamientos. Esto reduciría la probabilidad a $\frac{2}{3}$ si consideramos, junto con d’Alembert, estos tres casos como igualmente posibles. Pero es evidente que la probabilidad de sacar cara en el primer lanzamiento es $\frac{1}{2}$, mientras que en los otros dos casos es $\frac{1}{4}$, el primero de ellos siendo un evento simple que corresponde a dos eventos combinados: cara en el primero y segundo lanzamientos, y cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo. Si, de acuerdo con el segundo principio, añadimos la posibilidad $\frac{1}{2}$ de cara en el primer lanzamiento a la posibilidad $\frac{1}{4}$ de cruz en el primer lanzamiento y cara en el segundo, tendremos $\frac{3}{4}$ para la probabilidad buscada, que concuerda con lo encontrado en la suposición cuando jugamos a arrojar dos veces. Esta suposición no cambia en absoluto la oportunidad de aquel que apuesta a este evento; simplemente sirve para reducir los varios casos a los casos igualmente posibles.

Tercer principio. Uno de los puntos más importantes de la teoría de las probabilidades y el que se presta a más ilusiones es la manera en que estas probabilidades aumentan o disminuyen por su combinación mutua. Si los eventos son independientes entre sí, la probabilidad de su existencia combinada es el producto de sus respectivas probabilidades. Así, la probabilidad de sacar un as con un solo dado es $\frac{1}{6}$, y la de sacar dos ases al arrojar dos dados al mismo tiempo es $\frac{1}{36}$. Cada lado de uno siendo capaz de combinarse con los seis lados del otro, en realidad hay treinta y seis casos igualmente posibles, de entre los cuales un solo caso da dos ases. Por lo general, la probabilidad de que un evento simple en las mismas circunstancias ocurra consecutivamente un número dado de veces es igual a la probabilidad de este evento simple elevada a la potencia indicada por este número. Así, habiendo disminuido sin cesar las sucesivas potencias de una fracción menor que la unidad, un evento que depende de una serie de probabilidades muy grandes puede volverse extremadamente improbable. Supongamos que un incidente nos es transmitido por veinte testigos de forma tal que el primero lo ha transmitido al segundo, el segundo al tercero, y así sucesivamente. Supongamos, de nuevo, que la probabilidad de cada testimonio es igual a la fracción $\frac{9}{10}$; la del incidente resultante de los testimonios será menor que $\frac{1}{8}$. No podemos comparar mejor la disminución de la probabilidad que con la extinción de la luz de los objetos por la interposición de varias piezas de vidrio. Un número relativamente pequeño de piezas es suficiente para quitar la vista de un objeto que una sola pieza nos permite percibir de manera distinta. Los historiadores no parecen haber prestado la suficiente atención a esta degradación de la probabilidad de eventos cuando son vistos a lo largo de un gran número de generaciones; muchos eventos históricos reputados como ciertos serían al menos dudosos si fuesen sometidos a esta prueba.

En las ciencias puramente matemáticas, las consecuencias más distantes participan en la certeza del principio del que derivan. En las aplicaciones del análisis a la física, los resultados tienen toda la certeza de hechos o experiencias. Pero en las ciencias morales, donde cada inferencia es deducida de la que le precede sólo de manera probable, sin importar qué tan probables puedan ser estas deducciones la posibilidad de error aumenta con su número y al final sobrepasa la posibilidad de verdad en las consecuencias muy remotas del principio.

Cuarto principio. Cuando dos eventos dependen uno del otro, la probabilidad del evento compuesto es el producto de la probabilidad del primer evento y la probabilidad de que, habiendo ocurrido este evento, ocurrirá el segundo. Así, en el caso anterior de las tres urnas A, B, C de las cuales dos contienen sólo bolas blancas y una contiene sólo bolas negras, la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna C es $\frac{2}{3}$, ya que, de las tres urnas, sólo dos contienen bolas de tal color. Pero cuando ha sido sacada una bola blanca de la urna C, la indecisión relativa a aquella de las urnas que contiene solamente bolas negras se extiende exclusivamente a las urnas A y B; la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna B es $\frac{1}{2}$, y entonces el producto de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$, o $\frac{1}{3}$, es la probabilidad de sacar dos bolas blancas al mismo tiempo de las urnas B y C.

Por este ejemplo vemos la influencia de eventos pasados sobre la probabilidad de eventos futuros. Pues la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna B, que originalmente es $\frac{2}{3}$, se vuelve $\frac{1}{2}$ cuando ha sido sacada una bola blanca de la urna C, y cambiaría a certeza si de la misma urna hubiese sido sacada una bola negra. Determinaremos esta influencia por medio del siguiente principio, que es un corolario del anterior.

Quinto principio. Si calculamos *a priori* la probabilidad del evento ocurrido y la probabilidad de un evento compuesto de aquél y de un segundo [evento] esperado, la segunda probabilidad dividida por la primera será la probabilidad del evento esperado, sacada del evento observado.

Aquí se presenta la cuestión planteada por algunos filósofos concerniente a la influencia del pasado sobre la probabilidad del futuro. Supongamos, en el juego de caras y cruces, que la cara ha salido con más frecuencia que la cruz. Por este solo hecho seremos llevados a creer que en la constitución de la moneda hay una causa secreta que lo favorece. Así, en la conducción de la vida la felicidad constante es una prueba de aptitud que debería inducirnos a emplear preferiblemente a personas felices. Pero si por la falta de fiabilidad de las circunstancias nos vemos constantemente llevados a un estado de indecisión absoluta, si, por ejemplo, cambiamos de moneda en cada tiro en el juego de caras y cruces, el pasado no puede arrojar luz sobre el futuro, y sería absurdo tomarlo en cuenta.

Sexto principio. Cada una de las causas a las cuales puede atribuirse un evento observado está indicada con tanta verosimilitud como haya probabilidad de que el evento tendrá lugar, suponiendo que éste es constante. La probabilidad de existencia de cualesquiera de estas causas es pues una fracción cuyo numerador es la probabilidad del evento resultante de esta causa y cuyo denominador es la suma de las probabilidades similares relativas a todas las causas; si estas diversas causas, consideradas *a priori*, son desigualmente probables, es necesario emplear, en lugar de la probabilidad del evento resultante de cada causa, el producto de esta probabilidad por la posibilidad de la propia causa. Este es el principio fundamental de esta rama del análisis del azar, que consiste en pasar de eventos a causas.

Este principio es la razón por la que atribuimos eventos regulares a una causa particular. Algunos filósofos han pensado que estos eventos son menos posibles que otros y que, en el juego de caras y cruces, por ejemplo, la combinación en la que la cara sale veinte veces sucesivas es menos fácil en su naturaleza que aquellas en las que las caras y las cruces están mezcladas irregularmente. Pero esta opinión supone que los eventos pasados tienen una influencia sobre la posibilidad de eventos futuros, lo que no es admisible en absoluto. Las combinaciones regulares ocurren más raramente sólo porque son menos numerosas. Si buscamos una causa dondequiera que percibimos simetría, no es que consideremos un evento simétrico como menos posible que los demás, sino que, como este evento debe ser el efecto de una causa regular o del azar, la primera de estas suposiciones es más probable que la segunda. Sobre una mesa vemos letras arregladas en este orden:

C o n s t a n t i n o p l a, y juzgamos que este arreglo no es resultado del azar, y no porque sea menos posible que los otros, pues si esta palabra no fuese empleada en ningún lenguaje no esperaríamos que viniese de alguna causa particular, sino porque, estando esta palabra en uso entre nosotros, es incomparablemente más probable que alguna persona haya arreglado así estas letras a que este arreglo se deba al azar.

Este es el lugar para definir la palabra *extraordinario*. En nuestro pensamiento arreglamos todos los eventos posibles en varias clases, y consideramos como *extraordinarias* aquellas clases que incluyen un número muy pequeño. Así, en el juego de caras y cruces, la ocurrencia de caras cien veces sucesivas nos parece extraordinaria por el número casi infinito de combinaciones que pueden ocurrir en cien tiradas, y si dividimos las combinaciones en series regulares conteniendo un orden fácilmente comprensible, y en series irregulares, las últimas son incomparablemente más numerosas. Sacar de una urna una bola blanca de entre millones de bolas, todas siendo de este color menos una, nos parecería igualmente extraordinario, porque formamos solamente dos clases de eventos relativos a los dos colores. Pero sacar el número 475813, por ejemplo, de una urna que contiene un millón de números nos parece un evento ordinario, porque, comparando individualmente los números entre sí sin dividirlos en clases, no tenemos razón para creer que uno de ellos aparecerá más temprano que los otros.

De lo anterior debemos concluir que, por lo general, entre más extraordinario el evento, mayor la necesidad de que esté sustentado en pruebas sólidas. Para aquellos que dan fe, siendo capaces de engañar o de haber sido engañados, estas dos causas son mucho más probables a medida que la realidad del evento es menor. Veremos esto más particularmente cuando hablemos de la probabilidad del testimonio.

Séptimo principio. La probabilidad de un evento futuro es la suma de los productos de la probabilidad de cada causa, sacada del evento observado, por la probabilidad de que, esta causa existiendo, ocurrirá el evento futuro. El ejemplo que sigue ilustrará este principio.

Imaginemos una urna que contiene sólo dos bolas, cada una de las cuales puede ser blanca o negra. Se saca una de estas bolas y se pone de vuelta en la urna antes de proceder a una nueva extracción. Supongamos que en las primeras dos extracciones se han sacado bolas blancas; se requiere la probabilidad de sacar otra vez una bola blanca en la tercera extracción.

Aquí solamente pueden hacerse dos hipótesis: o bien una de las bolas es blanca y la otra negra, o bien ambas son blancas. En la primera hipótesis la probabilidad del evento observado es $\frac{1}{4}$, y es unidad o certeza en la segunda. Así, al considerar estas hipótesis como tantas causas, tendremos, según el sexto principio, $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{5}$ como sus respectivas probabilidades. Pero si ocurre la primera hipótesis, la probabilidad de sacar una bola blanca en la tercera extracción es $\frac{1}{2}$, y es igual a certeza en la segunda hipótesis. Multiplicando entonces las últimas probabilidades por aquellas de las hipótesis correspondientes, la suma de los productos, o $\frac{9}{10}$, será la probabilidad de sacar una bola blanca en la tercera extracción.

Cuando la probabilidad de un único evento es desconocida, podemos suponerla igual a cualquier valor desde cero hasta la unidad. La probabilidad de cada una de estas hipótesis, sacadas del evento observado, es, por el sexto principio, una fracción cuyo numerador es la probabilidad del evento en esta hipótesis y cuyo denominador es la suma de las probabilidades similares relativas a todas las hipótesis. Así, la probabilidad de que la posibilidad del evento esté comprendida dentro de ciertos límites es la suma de las fracciones comprendidas dentro de estos límites. Ahora, si multiplicamos cada fracción por la probabilidad del evento futuro, determinado en la hipótesis correspondiente, la suma de los productos relativos a todas las hipótesis será, por el séptimo principio, la probabilidad del evento futuro sacado del evento observado. Es así que encontramos que de un evento habiendo ocurrido sucesivamente cualquier número de veces, la probabilidad de que ocurra de nuevo la siguiente vez es igual a este número aumentado por la unidad dividido por el mismo número aumentado por dos unidades. Poniendo la época más antigua de la historia hace cinco mil años, o hace 1826213 días, y habiendo el sol salido constantemente en el intervalo en cada revolución de veinticuatro horas, es una apuesta de 1826214 a uno que saldrá otra vez mañana. Pero este número es incomparablemente mayor para quien, reconociendo en la totalidad de los fenómenos el principio regulador de los días y las estaciones, ve que en el momento actual nada puede detener su curso.

En su *Aritmética Política*, Buffon calcula de manera distinta la probabilidad anterior. Supone que difiere de la unidad sólo por una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es el número 2 elevado a una potencia igual al número de días que han transcurrido desde la época. Pero la verdadera forma de relacionar eventos pasados con la probabilidad de causas y de eventos futuros le era desconocida a este ilustre autor.

CAPÍTULO IV

ACERCA DE LA ESPERANZA

La probabilidad de eventos sirve para determinar la esperanza o el temor de las personas interesadas en su existencia. La palabra *esperanza* tiene diversas acepciones; por lo general, expresa la ventaja de aquel que espera un cierto beneficio en suposiciones que son solamente probables. Esta ventaja, en la teoría del azar, es producto de la suma esperada por la probabilidad de obtenerla; es la suma parcial que debe resultar cuando no deseamos correr los riesgos del evento al suponer que la división es hecha proporcional a las probabilidades. Esta división es la única equitativa cuando son eliminadas todas las circunstancias extrañas, porque un grado igual de probabilidad da un igual derecho a la suma esperada. A esta ventaja la llamaremos *esperanza matemática*.

Octavo principio. Cuando la ventaja depende de varios eventos, se obtiene al tomar la suma de los productos de la probabilidad de cada evento por el beneficio ligado a su ocurrencia.

Apliquemos este principio a algunos ejemplos. Supongamos que, en el juego de caras y cruces, Pablo recibe dos francos si saca cara en el primer lanzamiento y cinco francos si la saca sólo en el segundo. Multiplicando dos francos por la probabilidad $\frac{1}{2}$ del primer caso, y cinco francos por la probabilidad $\frac{1}{4}$ del segundo caso, la suma de los productos, o dos francos y un cuarto, será la ventaja de Pablo. Es la suma que debe dar por adelantado a aquel que le ha dado esta ventaja, pues, para mantener la igualdad del juego, el lanzamiento debe ser igual a la ventaja que procura.

Si Pablo recibe dos francos por sacar cara en el primer lanzamiento y cinco francos por sacarla en el segundo, independientemente de si la sacó o no en el primer lanzamiento, siendo $\frac{1}{2}$ la probabilidad de sacar cara en el segundo lanzamiento, la multiplicación de dos francos y cinco francos por $\frac{1}{2}$, la suma de estos productos, dará tres francos y medio para la ventaja de Pablo, y consecuentemente para su apuesta en el juego.

Noveno principio. En una serie de eventos probables de los cuales unos producen un beneficio y otros una pérdida, tendremos la ventaja que resulta de ella al hacer una suma de los productos de la probabilidad de cada evento favorable por el beneficio que procura, y al sustraer de esta suma la de los productos de la probabilidad de cada evento desfavorable por la pérdida que se le adjunta. Si la segunda suma es mayor que la primera, el beneficio se vuelve pérdida y la esperanza miedo.

En consecuencia, en la conducción de la vida siempre debemos hacer que el producto del beneficio esperado por su probabilidad sea al menos igual al producto similar relativo a la pérdida. Pero para conseguir esto es necesario apreciar exactamente las ventajas, las pérdidas, y sus respectivas probabilidades. Para esto es necesario una gran precisión mental, un juicio delicado, y una gran experiencia en los asuntos [relacionados]; es necesario saber cómo guardarse de los prejuicios, de las ilusiones de temor o esperanza, y de las ideas erróneas, ideas de fortuna y felicidad con las que la mayoría de las personas alimentan su egoísmo.

La aplicación de los principios anteriores a la siguiente cuestión ha ocupado mucho a los geómetras. Pablo juega caras y cruces con la condición de recibir dos francos si saca cara en el primer lanzamiento, cuatro francos si la saca sólo en el segundo lanzamiento, ocho francos si la saca sólo en el tercero, y así sucesivamente. Su apuesta en el juego debe ser, de acuerdo con el octavo principio, igual al número de lanzamientos, de manera tal que si el juego es infinito, la apuesta debe ser infinita. Sin embargo, ningún hombre razonable desearía arriesgar en este juego siquiera una pequeña suma, digamos cinco francos. ¿De dónde viene esta diferencia entre el resultado del cálculo y la indicación del sentido común? Inmediatamente reconocemos que equivale a esto: la ventaja moral que nos procura un beneficio no es proporcional a este beneficio y a que depende de miles de circunstancias, a menudo muy difíciles de definir, pero de las cuales la más general e importante es la de la fortuna.

En efecto, es evidente que un franco tiene mucho mayor valor para quien posee sólo unos miles que para quien posee millones. Entonces en el beneficio esperado debemos distinguir entre su valor absoluto y su valor relativo. Pero este último está regulado por los motivos que lo hacen deseable, mientras que el primero es independiente de ellos. No puede ofrecerse el principio general para apreciar este valor relativo, pero aquí hay uno propuesto por Daniel Bernoulli que servirá para muchos casos.

Décimo principio. El valor relativo de una suma infinitamente pequeña es igual a su valor absoluto dividido entre el beneficio total de la persona interesada. Esto supone que quienquiera tiene un cierto beneficio cuyo valor nunca puede estimarse como cero. En efecto, incluso aquel que no posee nada siempre da al producto de su trabajo y a sus esperanzas un valor al menos igual al que es absolutamente necesario para sostenerlo.

Si aplicamos el análisis al principio recién propuesto, obtenemos la siguiente regla: designemos por la unidad la parte de la fortuna de un individuo, independientemente de sus expectativas. Si determinamos los distintos valores que esta fortuna puede tener por virtud de estas expectativas y sus probabilidades, el producto de estos valores elevado respectivamente a las potencias indicadas por sus probabilidades será la fortuna física que procuraría al individuo la misma ventaja moral que recibe de la parte de su fortuna tomada como unidad y de sus expectativas; al sustraer la unidad del producto, la diferencia será el aumento de la fortuna física debida a las expectativas: llamaremos *esperanza moral* a este incremento. Es fácil ver que coincide con la esperanza matemática cuando la fortuna tomada como unidad se vuelve infinita con respecto a las variaciones que recibe de las expectativas. Pero cuando estas variaciones son una parte apreciable de esta unidad, las dos esperanzas pueden diferir muy materialmente entre ellas.

Esta regla nos lleva a resultados conformes con las indicaciones del sentido común que por estos medios pueden apreciarse con alguna exactitud. Así, en la cuestión anterior, encontramos que si la fortuna de Pablo es de doscientos francos, razonablemente no debe apostar más de nueve francos. La misma regla nos conduce a distribuir el peligro sobre varias partes de un beneficio esperado en lugar de exponer todo el beneficio a este peligro. Similarmente resulta que, en el juego más justo, la pérdida siempre es mayor que la ganancia. Supongamos, por ejemplo, que un jugador con una fortuna de cien francos arriesga cincuenta en el juego de caras y cruces; después de su apuesta en el juego, su fortuna se reducirá a ochenta y siete francos, esto es, su última suma le procurará la misma ventaja moral que el estado de su fortuna después de la apuesta. Entonces el juego es desventajoso incluso en el caso en el que la apuesta sea igual al producto de la suma esperada por su probabilidad. Desde esto podemos juzgar la inmoralidad de los juegos en los que la suma esperada está por debajo de este producto. Únicamente subsisten por falsos razonamientos y por la codicia que despiertan y, llevando a la gente a sacrificar sus recursos necesarios en esperanzas quiméricas de cuya improbabilidad no son conscientes, son la fuente de una infinidad de males.

Esta desventaja de los juegos de azar, la ventaja de no exponer al mismo peligro todo el beneficio esperado y todos los resultados similares indicados por el sentido común, subsiste sea cual sea la función de la fortuna física que expresa, para cada individuo, su fortuna moral. Es suficiente con que la proporción del aumento de esta función al aumento de la fortuna física disminuya en la medida en que esta última aumenta.

CAPÍTULO V

ACERCA DEL MÉTODO ANALÍTICO DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

La aplicación del principio recién expuesto a las diversas cuestiones de la probabilidad requiere métodos cuya investigación ha dado lugar a otros varios métodos de análisis y, especialmente, a la teoría de combinaciones y al cálculo de diferencias finitas.

Si formamos el producto de los binomios, la unidad más la primera letra, la unidad más la segunda letra, la unidad más la tercera letra, y así sucesivamente hasta n letras, y sustraemos la unidad de este producto desarrollado, el resultado será la suma de la combinación de todas estas letras tomadas una por una, dos por dos, tres por tres, etc., cada combinación teniendo la unidad como un coeficiente. Para tener el número de combinaciones de estas n letras tomadas s por s veces, debemos observar que, si suponemos que estas letras son iguales entre sí, el producto anterior se volverá la *enésima* potencia del binomio uno más la primera letra; así, el número de combinaciones de n letras tomadas s por s veces será el coeficiente de la s potencia de la primera letra en el desarrollo en este binomio, y este número se obtiene por medio de la bien conocida fórmula binomial.

Debe prestarse atención a las respectivas situaciones de las letras en cada combinación, observando que, si se une una segunda letra a la primera, puede ponerse en la primera o segunda posición, lo que da dos combinaciones. Si a estas combinaciones unimos una tercera letra, en cada combinación podemos darle el primero, el segundo, y el tercer rango, lo que forma tres combinaciones relativas a cada una de las otras dos, y en total seis combinaciones. De esto es fácil concluir que el número de arreglos de los cuales son susceptibles s letras es el producto de los números desde la unidad hasta s. Para prestar atención a las respectivas posiciones de las letras es necesario multiplicar, por este producto, el número de combinaciones de n letras s por s veces, lo que equivale a quitar el denominador del coeficiente del binomio que expresa este número.

Imaginemos una lotería compuesta por n números de los cuales r son sacados en cada sorteo. Se requiere la probabilidad de sacar s números dados en un sorteo. Para llegar a esto formemos una fracción cuyo denominador será el número de todos los casos posibles o de las combinaciones de *n* letras tomadas *r* por *r* veces, y cuyo numerador será el número de todas las combinaciones que contienen los *s* números dados. Esta fracción será la probabilidad requerida, y fácilmente encontraremos que puede reducirse a una fracción cuyo numerador es el número de combinaciones de *r* números tomados *s* por *s* veces, y cuyo denominador es el número de combinaciones de *n* números tomados similarmente *s* por *s* veces. Así, en la lotería de Francia, formada como se sabe por 90 números de los cuales se sacan cinco en cada sorteo, la probabilidad de sacar una combinación dada es $\frac{5}{90}$ o $\frac{1}{18}$, y entonces la lotería debe, en aras de la igualdad del juego, dar dieciocho veces la apuesta. El número total de combinaciones dos por dos de los 90 números es 4005, y el de las combinaciones dos por dos de 5 números es 10. La probabilidad de sacar un par dado es entonces $\frac{1}{4005}$, y la lotería debería dar cuatrocientas y un medio veces la apuesta; debería de darla 11748 veces para un trío, 511038 para un cuaternario, y 43949268 veces para un quinteto. La lotería está lejos de ofrecer al jugador estas ventajas.

Supongamos que en una urna hay *a* bolas blancas y *b* bolas negras, y que después de haber sacado una bola, ésta es puesta de nuevo en la urna; se requiere la probabilidad de que, en *n* número de saques, se saquen *m* bolas blancas y $n-m$ bolas negras. Es claro que el número de casos que pueden ocurrir en cada saque es $a+b$. Siendo cada caso del segundo saque capaz de combinarse con todos los casos del primero, el número de casos posibles en dos saques es el cuadrado del binomio $a+b$. En el desarrollo de este cuadrado, el cuadrado de a expresa el número de casos en los que una bola blanca es sacada dos veces, y el doble producto de *a* por *b* expresa el número de casos en los que se sacan una bola blanca y una bola negra. Finalmente, el cuadrado de *b* expresa el número de casos en los que se sacan dos bolas negras. Continuando de esta forma, vemos que por lo general la *enésima* potencia del binomio $a+b$ expresa el número de todos los casos posibles en *n* saques, y que en el desarrollo de esta potencia el término multiplicado por la *m* potencia de *a* expresa el número de casos en los que pueden sacarse *m* bolas blancas y $n-m$ bolas negras. Entonces, dividiendo este término entre toda la potencia del binomio, tendremos la probabilidad de sacar *m* bolas blancas y $n-m$ bolas negras. Siendo la proporción de los números a y $a+b$ la probabilidad de sacar una bola blanca en un saque, y siendo la proporción de los números b y $a+b$ la probabilidad de sacar una bola negra, si llamamos p y q a estas probabilidades, la probabilidad de sacar m bolas blancas en n saques será el término multiplicado por la m potencia de p en el desarrollo de la *enésima* potencia del binomio $p+q$; podemos ver que la suma $p+q$ es la unidad. Esta notable propiedad del binomio resulta muy útil en la teoría de las probabilidades. Pero el método más general y directo de resolver cuestiones de probabilidad consiste en hacerlas depender de ecuaciones de diferencias. Comparando las sucesivas condiciones de la función que expresa la probabilidad cuando aumentamos las variables por sus respectivas diferencias, la cuestión propuesta a menudo proporciona una proporción muy simple entre las condiciones. Esta proporción es lo que se conoce como *ecuación de diferenciales ordinarias o parciales*, ordinarias cuando hay sólo una variable, parciales cuando hay varias. Consideremos algunos ejemplos de esto.

Tres jugadores con una supuesta igual habilidad juegan bajo las siguientes condiciones: que uno de los primeros dos jugadores que derrota a su adversario juega con el tercero, y si lo derrota el juego se acaba. Si es derrotado, el ganador juega en contra del segundo hasta que uno de los jugadores haya derrotado consecutivamente a los otros dos, lo que finaliza el juego. Se requiere la probabilidad de que el juego acabe en un cierto número n de jugadas. Encontremos la probabilidad de que termine precisamente en la *enésima* jugada. Para ello, el jugador que gana debe entrar al juego en la jugada $n-1$ y ganar en la siguiente jugada. Pero si en lugar de ganar la jugada $n-1$ es derrotado por el adversario que recién venció al otro jugador, el juego terminaría en esta jugada. Así, la probabilidad de que uno de los jugadores entre al juego en la jugada $n-1$ y gane es igual a la probabilidad de que el juego termine precisamente con esta jugada, y como este jugador debe ganar la siguiente jugada para que el juego pueda terminar en la *enésima* jugada, la probabilidad de este último caso será sólo la mitad del anterior. Esta probabilidad es evidentemente una función del número n, y ésta es entonces igual a la mitad de la misma función cuando n es disminuido por la unidad. Esta igualdad forma una de aquellas ecuaciones llamadas *ecuaciones diferenciales finitas ordinarias*.

Con su uso, podemos determinar fácilmente la probabilidad de que el juego termine precisamente en una determinada jugada. Es evidente que el juego no puede terminar más pronto que en la segunda jugada, y por esto es necesario que el primero de los dos jugadores que ha derrotado a su adversario derrote en la segunda jugada al tercer jugador; la probabilidad de que el juego termine en esta jugada es $\frac{1}{2}$. Entonces, en virtud de la ecuación anterior, concluimos que las sucesivas probabilidades del final del juego son $\frac{1}{4}$ para la tercera jugada, $\frac{1}{8}$ para la cuarta jugada, y así sucesivamente; en general, $\frac{1}{2}$ elevado a la potencia $n-1$ para la *enésima* jugada. La suma de todas estas potencias de $\frac{1}{2}$ es la unidad menos la última de estas potencias; es la probabilidad de que el juego termine a más tardar en *n* jugadas.

Consideremos de nuevo el primer problema más difícilmente, que puede resolverse por probabilidades y que Pascal propuso a Fermat. Dos jugadores de igual habilidad, A y B, juegan bajo las condiciones de que el primero que derrote al otro un número dado de veces gane el juego y se quede con la suma de las apuestas. Después de algunos tiros, los jugadores acuerdan abandonar sin haber terminado el juego, y preguntamos de qué manera debe dividirse la suma. Es evidente que las partes deben ser proporcionales a las respectivas probabilidades de ganar el juego. La cuestión, entonces, se reduce a determinar estas probabilidades. Dependen, claramente, del número de puntos que le falta a cada jugador para alcanzar el número dado. Por lo tanto, la probabilidad de A es una función de los dos números que llamaremos *índices*. Si los dos jugadores acuerdan hacer un tiro más (un acuerdo que no cambia su condición siempre que después de este nuevo tiro la división se haga proporcionalmente a las nuevas probabilidades de ganar el juego), entonces, o bien A ganaría este tiro y en tal caso el número de puntos que le faltan disminuiría por una unidad, o bien ganaría el jugador B y en tal caso el número de puntos que le faltan a este jugador sería menor por una unidad. Pero la probabilidad de cada uno de estos casos es $\frac{1}{2}$, y entonces la función buscada es igual a un medio de esta función en la que disminuimos por una unidad al primer índice más la mitad de la misma función en la que la segunda variable es disminuida por una unidad. Esta igualdad es una de aquellas ecuaciones llamadas *ecuaciones de diferenciales parciales*.

Con su uso podemos determinar las probabilidades de A al dividir los números más pequeños, y al observar que la probabilidad o la función que expresa es igual a la unidad cuando al jugador A no le falta un solo punto, o cuando el primer índice es cero, y que esta función se vuelve cero con el segundo índice. Supongamos, pues, que al jugador A le falta un solo punto; encontramos que su probabilidad es $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$, etc., dependiendo de si a B le falta un punto, dos, tres, etc. Entonces es generalmente la unidad menos la potencia de $\frac{1}{2}$, igual al número de puntos que le faltan a B. Supondremos entonces que al jugador A le faltan dos puntos, y su probabilidad será igual a $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{16}$, etc., dependiendo de si a B le falta un punto, dos puntos, tres puntos, etc. Supondremos otra vez que al jugador A le faltan tres puntos, y así sucesivamente.

Este modo de obtener los valores sucesivos de una cantidad por medio de su ecuación de diferencias es largo y laborioso. Los geómetras han buscado métodos para obtener la función general de índices que satisfaga esta ecuación, de manera tal que para cualquier caso particular sólo necesitemos sustituir en esta función los valores correspondientes de los índices. Consideremos este tema de forma general. Para este propósito concibamos una serie de términos arreglados a lo largo de una línea horizontal de manera tal que cada uno de ellos derive del anterior de acuerdo con una ley dada. Supongamos que esta ley está expresada por una ecuación entre varios términos consecutivos y su índice o el número que indica el rango que ocupan en la serie. A esta ecuación la llamo *ecuación de diferencias finitas por un único índice*. El orden o el grado de esta ecuación es la diferencia de rango de sus dos términos extremos. Con su uso podemos determinar sucesivamente los términos de la serie y continuar indefinidamente, pero para ello es necesario conocer un número de términos de la serie igual al grado de la ecuación. Estos términos son las constantes arbitrarias de la expresión del término general de la serie o de la integral de la ecuación de diferencias.

Imaginemos ahora, por debajo de los términos de la serie anterior, una segunda serie de términos arreglados horizontalmente, y una vez más, por debajo de los términos de la segunda serie, una tercera serie horizontal, y así hasta el infinito, y supongamos que los términos de todas estas series están conectados por una ecuación general entre varios términos consecutivos, tomados tantas veces en el sentido horizontal como en el vertical, y los números que indican su rango en los dos sentidos. Esta ecuación es llamada *ecuación de diferencias finitas parciales por dos índices*.

Imaginemos del mismo modo, por debajo del plano de las series anteriores, un segundo plano de series similares, cuyos términos han de ponerse respectivamente debajo de aquellos del primer plano; imaginemos, de nuevo, un tercer plano de series similares por debajo del segundo, y así hasta el infinito. Supongamos que todos los términos de estas series están conectados por una ecuación entre varios términos consecutivos tomados en el sentido de longitud, anchura, y profundidad, y los tres números que indican su rango en estos tres sentidos. A esta ecuación la llamo *ecuación de diferencias finitas parciales por tres índices*.

Finalmente, considerando la cuestión abstracta e independientemente de las dimensiones del espacio, imaginemos un sistema de magnitudes que deben ser funciones de un cierto número de índices, y supongamos entre estas magnitudes sus diferencias relativas a estos índices y los propios índices, tantas ecuaciones como haya magnitudes; estas ecuaciones serán diferencias finitas parciales por un cierto número de índices.

Con su uso podemos determinar sucesivamente estas magnitudes. Pero del mismo modo que la ecuación por un único índice requiere que conozcamos un cierto número de términos de la serie, así la ecuación por dos índices requiere que conozcamos una o varias líneas de series cuyos términos generales deban ser expresados, cada uno, por una función arbitraria de uno de los índices. Similarmente, la ecuación por tres índices requiere que conozcamos uno o varios planos de series cuyos términos generales deban ser expresados, cada uno, por una función arbitraria de dos índices, y así sucesivamente. En todos estos casos podremos determinar, por eliminaciones sucesivas, un cierto término de la serie. Pero estando comprendidas en el mismo sistema de ecuaciones todas las ecuaciones de entre las cuales eliminamos, todas las expresiones de los términos sucesivos que obtenemos por estas eliminaciones deben estar comprendidas en una expresión general, una función de los índices que determinan el rango del término. Esta expresión es la integral de la ecuación de diferencias propuesta, y su búsqueda es el objeto del cálculo integral.

Taylor ha sido el primero en considerar, en su trabajo *Metodus incrementorum*, ecuaciones lineales de diferencias finitas. Expone el modo de integrar aquellas [ecuaciones] de primer orden con un coeficiente y un último término, funciones del índice. En realidad, las relaciones de los términos de las progresiones aritmética y geométrica que siempre han sido consideradas son los casos más simples de ecuaciones de diferencias lineales, pero no han sido consideradas desde este punto de vista. Fue uno de ellos el que, adhiriéndose a teorías generales, condujo a estas teorías, y por tanto son verdaderos descubrimientos.

Casi al mismo tiempo, Moivre estaba considerando, bajo el nombre de series recurrentes, las ecuaciones de diferencias finitas de un cierto orden teniendo un coeficiente constante. Consiguió integrarlas de un modo bastante ingenioso. Ya que siempre resulta interesante seguir el progreso de los inventores, expondré el método de Moivre aplicándolo a una serie recurrente cuya relación entre tres términos consecutivos está dada. Primero considera la relación entre los términos consecutivos de una progresión geométrica o la ecuación de dos términos que la expresa. Refiriéndola a términos menores que la unidad, la multiplica en este estado por un factor constante y sustrae el producto de la primera ecuación. Así obtiene una ecuación entre tres términos consecutivos de la progresión geométrica. Después, Moivre considera una segunda progresión cuya proporción de términos es el mismo factor que recién ha utilizado. De modo similar, disminuye por una unidad el índice de los términos de la ecuación de esta nueva progresión. En esta condición la multiplica por la proporción de los términos de la primera progresión, y sustrae el producto de la ecuación de la segunda progresión, lo que le da, entre tres términos consecutivos de esta progresión, una relación completamente similar a aquella que había encontrado para la primera progresión. Después observa que, si uno añade término por término las dos progresiones, existe la misma proporción entre cualesquiera tres de estos términos consecutivos. Compara los coeficientes de esta proporción con aquellos de la relación de los términos de la serie recurrente propuesta y encuentra, para determinar las proporciones de las dos progresiones geométricas, una ecuación de segundo grado cuyas raíces son estas proporciones. Así, Moivre descompone la serie recurrente en dos progresiones geométricas, cada una multiplicada por una constante arbitraria que él determina por medio de los dos primeros términos de la serie recurrente. Este ingenioso proceso es, en efecto, el que desde entonces ha utilizado d'Alembert para la integración de ecuaciones lineales de diferencias infinitamente pequeñas con coeficientes constantes, y que Lagrange ha transformado en ecuaciones similares de diferencias finitas.

Por último, he considerado las ecuaciones lineales de diferencias finitas parciales primero bajo el nombre de series *recurro-recurrentes* y después bajo su propio nombre. La manera más general y simple de integrar todas estas ecuaciones me parece que es aquella que he basado sobre la consideración de funciones discriminantes, cuya idea está ofrecida aquí.

Si concebimos una función V de una variable t desarrollada de acuerdo con las potencias de esta variable, el coeficiente de cualquiera de estas potencias será una función del exponente o índice de esta potencia, cuyo índice llamaré x. V es lo que llamo la función discriminante de este coeficiente o de la función del índice.

Ahora, si multiplicamos la serie del desarrollo de V por una función de la misma variable, como, por ejemplo, la unidad más dos veces esta variable, el producto será una nueva función discriminante en la que el coeficiente de la potencia x de la variable t será igual al coeficiente de la misma potencia en V más dos veces el coeficiente de la potencia menos la unidad. Así, la función del índice x en el producto será igual a la función del índice x en V más dos veces la misma función en la que el índice es disminuido por la unidad. Esta función del índice x es, pues, una derivada de la función del mismo índice en el desarrollo de V, una función que llamaré la *función primitiva* del índice. Designemos a la función derivada con la letra δ, puesta antes de la función primitiva. La derivación indicada por esta letra dependerá del multiplicador de V, que llamaremos T, y que supondremos desarrollado como V por la proporción de las potencias de la variable t. Si multiplicamos de nuevo por T el producto de V por T, lo que equivale a multiplicar V por T^2, formaremos una tercera función discriminante en la que el coeficiente de la x potencia de t será una derivada similar al coeficiente correspondiente del producto anterior; puede expresarse por el mismo carácter δ puesto antes de la derivada anterior, y entonces este carácter se escribirá dos veces antes de la función primitiva de x. Pero en lugar de escribirlo dos veces, le daremos 2 como exponente.

Continuando del mismo modo, vemos que, si multiplicamos V por la *enésima* potencia de T, tendremos el coeficiente de la x potencia de t en el producto de V por la *enésima* potencia de T al poner antes de la función primitiva el carácter δ con n como exponente.

Supongamos, por ejemplo, que T es la unidad dividida entre t. Entonces en el producto de V por T el coeficiente de la x potencia de t será el coeficiente de la potencia mayor por una unidad en V; este coeficiente en el producto de V por la *enésima* potencia de T será entonces la función primitiva en la que x aumenta por n unidades.

Consideremos ahora una nueva función Z de t, desarrollada como V y T de acuerdo con las potencias de t. Designemos con el carácter Δ, puesto antes de la función primitiva, al coeficiente de la x potencia de t en el producto de V por Z; este coeficiente en el producto de V por la *enésima* potencia de Z será expresado por el carácter Δ afectado por el exponente n y puesto antes de la función primitiva de x.

Si, por ejemplo, Z es igual a la unidad dividida entre t menos uno, el coeficiente de la x potencia de t en el producto de V por Z será el coeficiente de la $x+1$ potencia de t en V menos el coeficiente de la x potencia. Será, pues, la diferencia finita de la función primitiva del índice x. Entonces el carácter Δ indica una diferencia finita de la función primitiva en el caso donde el índice varía por unidad, y la *enésima* potencia de este carácter puesto antes de la función primitiva indicará la *enésima* diferencia finita de esta función. Si suponemos que T es la unidad dividida entre t, tendremos que T es igual al binomio $Z+1$. El producto de V por la *enésima* potencia de T será entonces igual al producto de V por la *enésima* potencia del binomio $Z+1$. Desarrollando esta potencia en la proporción de las potencias de Z, el producto de V por los varios términos de este desarrollo será las funciones discriminantes de estos mismos términos en los que sustituimos, en lugar de las potencias de Z, las correspondientes diferencias finitas de la función primitiva del índice.

Ahora, el producto de V por la *enésima* potencia de T es la función primitiva en la que el índice x aumenta por n unidades; volviendo a pasar desde las funciones discriminantes a sus coeficientes, tendremos que esta función primitiva así aumentada es igual al desarrollo de la *enésima* potencia del binomio $Z+1$, siempre que en este desarrollo sustituyamos, en lugar de las potencias de Z, las correspondientes diferencias de la función primitiva y que multipliquemos el término independiente de estas potencias por la función primitiva. Obtendremos así la función primitiva cuyo índice aumenta por cualquier número n por medio de sus diferencias.

Suponiendo que T y Z siempre tienen los valores anteriores, tendremos que Z es igual al binomio $T - 1$; el producto de V por la *enésima* potencia de Z será entonces igual al producto de V por el desarrollo de la *enésima* potencia del binomio $T - 1$. Volviendo a pasar desde las funciones discriminantes a sus coeficientes tal como recién se ha hecho, tendremos la *enésima* diferencia de la función primitiva expresada por el desarrollo de la *enésima* potencia del binomio $T - 1$, en donde sustituimos, para las potencias de T, esta misma función cuyo índice aumenta por el exponente de la potencia, y para el término independiente de t, que es una unidad, la función primitiva, que da esta diferencia por medio de los términos consecutivos de esta función.

Poniendo δ antes de la función primitiva que expresa la derivada de esta función, que multiplica la potencia x de t en el producto de V por T, y Δ expresando la misma derivada en el producto de V por Z, por lo anterior llegamos a este resultado general: cualquiera que sea la función de la variable t representada por T y Z, en el desarrollo de todas las ecuaciones idénticas susceptibles a ser formadas entre estas funciones podemos sustituir los caracteres δ y Δ en lugar de T y Z, siempre que escribamos la función primitiva del índice en serie con las potencias y con los productos de las potencias de los caracteres, y que multipliquemos por esta función los términos independientes de estos caracteres.

Por medio de este resultado general podemos transformar cualquier potencia de una diferencia de la función primitiva del índice x, en donde x varía por unidad, en una serie de diferencias de la misma función en donde x varía por un cierto número de unidades y recíprocamente. Supongamos que T es la potencia i de la unidad dividida entre $t - 1$ y que Z es siempre la unidad dividida entre $t - 1$; entonces el coeficiente de la potencia x de t en el producto de V por T será el coeficiente de la $x + i$ potencia de t en V menos el coeficiente de la potencia x de t; será, entonces, la diferencia finita de la función primitiva del índice x en donde variamos este índice por el número i. Es fácil ver que T es igual a la diferencia entre la potencia i del binomio $Z + 1$ y la unidad. La *enésima* potencia de T es igual a la *enésima* potencia de esta diferencia. Si en esta igualdad sustituimos en lugar de T y Z los caracteres δ y Δ, y si después del desarrollo ponemos al final de cada término la función primitiva del índice x, tendremos la *enésima* diferencia de esta función en la que x varía por i unidades expresadas por una serie de diferencias de la misma función en la que x varía por unidad. Esta serie es únicamente una transformación de la diferencia que expresa y que es idéntica a ella; pero es en transformaciones similares donde reside el poder del análisis.

La generalidad del análisis nos permite suponer que, en esta expresión, n es negativo. Entonces las potencias negativas de δ y Δ indican las integrales. En efecto, la *enésima* diferencia de la función primitiva teniendo por función discriminante al producto de V por la *enésima* potencia del binomio uno dividido entre t menos la unidad, la función primitiva que es la *enésima* integral de esta diferencia tiene por función discriminante a aquella de la misma diferencia multiplicada por la *enésima* potencia tomada menor que el binomio uno dividido entre t menos uno, una potencia a la cual corresponde la misma potencia del carácter Δ. Esta potencia indica, entonces, una integral del mismo orden, variando por unidad el índice x, y las potencias negativas de δ indican igualmente las integrales x variando por i unidades. Vemos así, de la manera más clara y simple, la racionalidad del análisis observado entre las potencias positivas y las diferencias y entre las potencias negativas y las integrales.

Si la función indicada por δ puesto antes de la función primitiva es cero, tendremos una ecuación de diferencias finitas, y V será la función discriminante de su integral. Para obtener esta función discriminante debemos notar que en el producto de V por T todas las potencias de t deben desaparecer, excepto aquellas inferiores al orden de la ecuación de diferencias; entonces V es igual a una fracción cuyo denominador es T y cuyo numerador es un polinomio en el que la potencia más alta de t es menor por unidad que el orden de la ecuación de diferencias. Los coeficientes arbitrarios de las varias potencias de t en este polinomio, incluyendo la potencia cero, estarán determinados por tantos valores de la función primitiva del índice cuando sucesivamente hagamos que x sea igual a cero, a uno, a dos, etc. Una vez dada la ecuación de diferencias, determinamos T al poner todos sus términos en el primer miembro y cero en el segundo; al sustituir en el primer miembro la unidad en lugar de la función que tiene el índice más grande; la primera potencia de *t* en lugar de la función primitiva en donde este índice es disminuido por unidad; la segunda potencia de *t* por la función primitiva donde este índice es disminuido por dos unidades, y así sucesivamente. El coeficiente de la *x* potencia de *t* en el desarrollo de la expresión anterior de *V* será la función primitiva de *x* o la integral de la ecuación de diferencias finitas. Para este desarrollo el análisis proporciona varios medios de los cuales podemos elegir el más apropiado para la cuestión propuesta; ésta es una ventaja de este método de integración.

Concibamos ahora que *V* sea una función de las dos variables *t* y *t'* desarrolladas de acuerdo con las potencias y los productos de estas variables; el coeficiente de cualquier producto de las potencias *x* y *x'* de *t* y *t'* será una función de los exponentes o índices *x* y *x'* de estas potencias. A esta función la llamaré la *función primitiva* de la cual *V* es la función discriminante.

Multipliquemos *V* por una función *T* de las dos variables *t* y *t'* desarrollada como *V* en proporción de las potencias y los productos de estas variables; el producto será la función discriminante de una derivada de la función primitiva. Si *T*, por ejemplo, es igual a la variable *t* más la variable *t'* menos dos, esta derivada será la función primitiva de la cual disminuimos por unidad al índice *x* más esta misma función primitiva de la cual disminuimos por unidad al índice *x'* menos dos veces la función primitiva. Designando cualquier *T* que pueda ser por el carácter δ puesto antes de la función primitiva, esta derivada, el producto de *V* por la *enésima* potencia de *T*, será la función discriminante de la derivada de la función primitiva antes de la cual uno pone la *enésima* potencia del carácter δ. Por lo tanto, resultan teoremas análogos a aquellos que son relativos a funciones de una sola variable.

Supongamos que la función indicada por el carácter δ sea cero; uno tendrá una ecuación de diferencias parciales. Si, por ejemplo, tal como antes hacemos que *T* sea igual a la variable *t* más la variable $t' - 2$, tenemos cero igual a la función primitiva de la cual disminuimos por unidad al índice *x* más la misma función de la cual disminuimos por unidad al índice *x'* menos dos veces la función primitiva. La función discriminante *V* de la función primitiva o de la integral de esta ecuación debe entonces ser tal que su producto por

T no incluya, en absoluto, los productos de *t* por *t'*. Pero *V* puede incluir, por separado, las potencias de *t* y las de *t'*, esto es, una función arbitraria de *t* y una función arbitraria de *t'*; *V* es entonces una fracción cuyo numerador es la suma de estas dos funciones arbitrarias y cuyo denominador es *T*. El coeficiente del producto de la *x* potencia de *t* por la *x'* potencia de *t'* en el desarrollo de esta fracción será entonces la integral de la precedente ecuación de diferencias parciales. Este método para integrar este tipo de ecuaciones me parece ser el más simple y fácil por el empleo de los varios procesos analíticos para el desarrollo de fracciones racionales.

Apenas serían comprendidos detalles más amplios de este tema sin ayuda del cálculo.

Considerando ecuaciones de diferencias parciales infinitamente pequeñas como ecuaciones de diferencias parciales finitas en las que nada se omite, podemos arrojar luz sobre los oscuros puntos de su cálculo, que han sido tema de grandes discusiones entre los geómetras. Es así que he demostrado la posibilidad de introducir funciones discontinuas en sus integrales, siempre que la discontinuidad tenga lugar sólo para las diferenciales del orden de estas ecuaciones o de un orden superior. Los trascendentes resultados del cálculo son, como todas las abstracciones del entendimiento, signos generales cuyo verdadero significado solamente puede averiguarse al repasar, por análisis metafísico, las ideas elementales que han llevado a ellos. Esto suele presentar grandes dificultades, porque la mente humana intenta menos transportarse hacia el futuro que retirarse dentro de sí misma. La comparación de diferencias infinitamente pequeñas con diferencias finitas también puede arrojar mucha luz sobre la metafísica del cálculo infinitesimal.

Es fácilmente demostrable que la *enésima* diferencia finita de una función en la que el incremento de la variable es *E* siendo dividido por la *enésima* potencia de *E*, el cociente reducido en serie por proporción a las potencias del incremento *E* está formado por un primer término independiente de *E*. En la medida que *E* disminuye, la serie se aproxima cada vez más a este primer término del cual puede diferir sólo por cantidades menores que cualquier magnitud asignable. Este término es entonces el límite de la serie, y expresa, en el cálculo diferencial, la *enésima* diferencia infinitamente pequeña de la función dividida entre la *enésima* potencia del incremento infinitamente pequeño.

Considerando las diferencias infinitamente pequeñas desde este punto de vista, vemos que las diversas operaciones del cálculo diferencial equivalen a comparar por separado, en el desarrollo de expresiones idénticas, los términos finitos o aquellos independientes de los incrementos de las variables que son consideradas como infinitamente pequeñas; esto es rigurosamente exacto, siendo indeterminantes estos incrementos. Así, el cálculo diferencial tiene toda la exactitud de otras operaciones algebraicas.

La misma exactitud se encuentra en las aplicaciones del cálculo diferencial a la geometría y la mecánica. Si imaginamos una curva cortada por una secante en dos puntos adyacentes, nombrando *E* al intervalo de las ordenadas de estos dos puntos, *E* será el incremento de la abscisa desde la primera hasta la segunda ordenada. Es fácil ver que el correspondiente incremento de la ordenada será el producto de *E* por la primera ordenada dividida entre su subsecante; aumentando en esta ecuación de la curva la primera ordenada por este incremento, tendremos la ecuación relativa a la segunda ordenada. La diferencia de estas dos ecuaciones será una tercera ecuación que, desarrollada por la proporción de las potencias de *E* y dividida entre *E*, tendrá su primer término independiente de *E*, que será el límite de este desarrollo. Este término, igual a cero, dará entonces el límite de las subsecantes, un límite que es evidentemente la subtangente.

Este método particularmente feliz para obtener la subtangente lo debemos a Fermat, quien lo extendió a curvas trascendentes. Este gran geómetra expresa el incremento de la abscisa con el carácter *E*, y considerando únicamente la primera potencia de este incremento, determina exactamente – como nosotros lo hacemos con el cálculo diferencial – las subtangentes de las curvas, sus puntos de inflexión, la *máxima* y *mínima* de sus ordenadas, y en general aquellas [subtangentes] de las funciones racionales. Vemos igualmente, por su bella solución del problema de la refracción de la luz, insertado en la *Colección de correspondencia con Descartes*, que sabe cómo extender sus métodos a funciones irracionales al liberarlos de irracionalidades por la elevación de las raíces a potencias. Fermat debe ser considerado, entonces, como el verdadero descubridor del cálculo diferencial. Desde entonces, Newton hizo este cálculo más analítico en su *Método de fluxiones*, y simplificó y generalizó los procesos por medio de su bello teorema del binomio. Finalmente, alrededor del mismo tiempo, Leibniz enriqueció al cálculo diferencial con una notación que, al indicar el paso de lo finito a lo infinitamente pequeño, añade, a la ventaja de expresar los resultados generales del cálculo, la de ofrecer los primeros valores aproximados de las diferencias y de las sumas de las cantidades; esta notación está adaptada por sí misma al cálculo de diferenciales parciales.

A menudo llegamos a expresiones que contienen tantos términos y factores que las sustituciones numéricas son impracticables. Esto tiene lugar en cuestiones de probabilidad cuando consideramos un gran número de eventos. Mientras tanto, es necesario tener el valor numérico de las fórmulas para saber con qué probabilidad están indicados los resultados que los eventos desarrollan por multiplicación. Es necesario, en especial, tener la ley de acuerdo con la cual esta probabilidad se acerca continuamente a la certeza, que alcanzará finalmente si el número de eventos fuese infinito. Para obtener esta ley, consideré que las integrales definidas de las diferenciales multiplicadas por los factores elevados a grandes potencias daríán, por integración, las fórmulas compuestas de un gran número de términos y factores. Esta observación me llevó a la idea de transformar, en integrales similares, las complicadas expresiones del análisis y las integrales de la ecuación de diferencias. Satisfice esta condición por un método que da, al mismo tiempo, la función compuesta bajo el signo integral y los límites de la integración. Ofrece esta notable cosa: que la función es la misma función discriminante de las expresiones y las ecuaciones propuestas; esto adhiere este método a la teoría de funciones discriminantes, de la cual es así el complemento. Además, sólo sería cuestión de reducir la integral definida a una serie que converja. Esto lo he obtenido por un proceso que hace que la serie converja más rápidamente a medida que la fórmula que representa sea más complicada, así que es más exacta a medida que se vuelve más necesaria. Con frecuencia, la serie tiene por factor a la raíz cuadrada de la proporción de la circunferencia al diámetro; a veces depende de otros trascendentes cuyo número es infinito.

Una observación importante que pertenece a la gran generalidad del análisis, y que nos permite extender este método a fórmulas y a ecuaciones de diferencia que la teoría de la probabilidad presenta muy frecuentemente, es que la serie a la que uno llega al suponer como reales y positivos los límites de las integrales definidas tiene lugar igualmente en el caso donde la ecuación que determina estos límites tiene únicamente raíces negativas o imaginarias. Estos pasos de lo positivo a lo negativo y de lo real a lo imaginario, de los cuales he hecho uso por primera vez, me condujeron a los valores de muchas integrales definidas singulares, que concordantemente he demostrado directamente. Podemos entonces considerar estos pasos como un medio de descubrimiento paralelo a la inducción y la analogía, empleadas por mucho tiempo por los geómetras, primero con una reserva extrema y luego con total confianza, ya que su uso ha sido justificado por un gran número de ejemplos. Mientras tanto, siempre es necesario confirmar con demostraciones directas los resultados obtenidos por estos diversos medios.

Al conjunto de los métodos anteriores lo he llamado *cálculo de funciones discriminantes*, y sirve de base para el trabajo que he publicado bajo el título de *Teoría analítica de las probabilidades*. Está conectado con la simple idea de indicar las multiplicaciones repetidas de una cantidad por sí misma o sus potencias enteras y positivas escribiendo en la parte superior de la letra que la expresa los números que marcan los grados de estas potencias.

Esta notación, empleada por Descartes en su *Geometría* y generalmente adoptada desde la publicación de este importante trabajo, es poca cosa, especialmente si la comparamos con la teoría de curvas y funciones variables por la cual este gran geómetra ha establecido los fundamentos del cálculo moderno. Pero el lenguaje del análisis, el más perfecto de todos, siendo en sí mismo un poderoso instrumento de descubrimientos, sus notaciones, especialmente cuando son necesarias y están felizmente concebidas, son gérmenes de nuevos cálculos. Esto se vuelve apreciable con el siguiente ejemplo.

Wallis, quien en su trabajo *Arithmetica Infinitorum*, uno de los que más ha contribuido al progreso del análisis, se interesó especialmente por seguir el hilo de la inducción y la analogía, consideró que si uno divide el exponente de una letra entre dos, tres, etc., el cociente será en consecuencia la notación cartesiana, y cuando la división es posible, el exponente de la raíz cuadrada, cúbica, etc., de la cantidad que representa la letra elevada al exponente del dividendo. Extendiendo por analogía este resultado al caso donde la división es imposible, consideró una cantidad elevada a un exponente fraccionario como la raíz del grado indicado por el denominador de esta fracción, a saber, de la cantidad elevada a una potencia indicada por el numerador. Observó entonces que, de acuerdo con la notación cartesiana, la multiplicación de dos potencias de la misma letra equivale a añadir sus exponentes, y que su división equivale a sustraer los exponentes de la potencia del divisor de aquel de la potencia del dividendo, cuando el segundo de estos exponentes es mayor que el primero. Wallis extendió este resultado al caso donde el primer exponente es igual a o mayor que el segundo, lo que hace que la diferencia sea cero o negativa. Supuso entonces que un exponente negativo indica la unidad dividida entre la cantidad elevada al mismo exponente tomado positivamente. Estas observaciones lo llevaron a integrar generalmente las diferenciales monomias, de donde infirió las integrales definidas de un tipo particular de diferenciales binomiales cuyo exponente es un número entero positivo. Así pues, la observación de la ley de los números que expresan estas integrales, una serie de interpolaciones y felices inducciones donde uno percibe el germen del cálculo de integrales definidas que ha ocupado tanto a los geómetras y que constituye uno de los fundamentos de mi nueva *Teoría de las probabilidades,* le dio la proporción del área del círculo al cuadrado de su diámetro expresada por un producto infinito que, cuando uno lo detiene, confina esta proporción a límites cada vez más convergentes; éste es uno de los resultados más singulares en el análisis. Pero es notable que Wallis, que tan bien había considerado los exponentes fraccionarios de potencias radicales, haya pasado a notar estas potencias tal como se había hecho antes que él. Si no me equivoco, fue Newton, en sus *Cartas a Oldembourg,* el primero en emplear la notación de estas potencias con exponentes fraccionarios. Comparando inductivamente, práctica que Wallis ejercía bellamente, determinó la ley de estos coeficientes y la extendió, por analogía, a potencias fraccionarias y negativas. Estos diversos resultados, basados en la notación de Descartes, muestran su influencia en el progreso del análisis. Aún tiene la ventaja de ofrecer la más simple y razonable idea de los logaritmos, que en realidad sólo son los exponentes de una magnitud cuyas potencias sucesivas, incrementando en grados infinitamente pequeños, pueden representar a todos los números.

Pero la extensión más importante que ha recibido esta notación es la de los exponentes variables, que constituye el cálculo exponencial, una de las ramas más fructíferas del análisis moderno. Leibniz fue el primero en indicar los trascendentes con exponentes variables, y de este modo ha completado el sistema de elementos de los cuales puede componerse una función finita; pues cada función explícita finita de una variable puede reducirse, en último análisis, a magnitudes simples, combinadas por el método de adición, sustracción, multiplicación, y división, y elevadas a potencias constantes o variables. Las raíces de las ecuaciones formadas desde estos elementos son las funciones implícitas de la variable. Es así que una variable tiene por logaritmo al exponente de la potencia que es igual a ella en la serie de las potencias del número cuyo logaritmo hiperbólico es la unidad, y el logaritmo de una variable de él es una función implícita.

Leibniz pensó en dar a su carácter diferencial los mismos exponentes en cuanto a magnitudes, pero entonces, en lugar de indicar las multiplicaciones repetidas de la misma magnitud, estos exponentes indican las diferenciaciones repetidas de la misma función. Esta nueva extensión de la notación cartesiana condujo a Leibniz a la analogía de potencias positivas con las diferenciales, y de potencias negativas con las integrales. Lagrange ha seguido esta singular analogía en todos sus desarrollos, y por una serie de inducciones que puede considerarse como una de las aplicaciones más bellas jamás hechas del método de inducción, ha llegado a fórmulas generales que son tan curiosas como útiles en las transformaciones de diferencias y de integrales, las unas en las otras, cuando las variables tienen diversos incrementos finitos y cuando éstos son infinitamente pequeños. Pero no ha ofrecido las demostraciones que le parecen más difíciles. La teoría de funciones discriminantes extiende las notaciones cartesianas a algunos de sus caracteres; demuestra la analogía de las potencias y las operaciones indicadas por estos caracteres, así que todavía puede considerarse como el cálculo exponencial de caracteres. Todo lo relacionado con la serie y la integración de ecuaciones de diferencias surge de ella con una extrema facilidad.

PARTE II

APLICACIONES DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

CAPÍTULO VI

JUEGOS DE AZAR

Las combinaciones que presentan los juegos fueron el objeto de las primeras investigaciones de probabilidades. En una infinita variedad de estas combinaciones, muchas de las cuales se prestaron inmediatamente al cálculo, otras requirieron cálculos más difíciles, y las dificultades aumentaron en la medida en que las combinaciones se hicieron más complicadas, el deseo por vencerlas y la curiosidad han estimulado a los geómetras a perfeccionar cada vez más este tipo de análisis. Ya hemos visto que los beneficios de una lotería se determinan fácilmente por la teoría de combinaciones. Pero es más difícil saber en cuántos sorteos uno puede apostar uno contra uno que, por ejemplo, salgan todos los números, n siendo el número de números, r el de los números sacados en cada sortero, e i el número desconocido de saques. La expresión de la probabilidad de sacar todos los números depende de la *enésima* diferencia finita de la potencia i de un producto de r números consecutivos. Cuando el número n es considerable, la búsqueda por el valor de i que hace que esta probabilidad sea igual a $\frac{1}{2}$ se vuelve imposible, a menos que esta diferencia se convierta en una serie muy convergente. Esto se consigue fácilmente por el método indicado aquí debajo de las aproximaciones de funciones de números muy grandes. Se encuentra que, debido a que la lotería está compuesta de diez mil números, uno de los cuales se saca en cada sorteo, hay una desventaja en apostar uno contra uno que todos los números serán sacados en 95767 sorteos y una ventaja en hacer la misma apuesta para 95768 sorteos. En la lotería de Francia, esta apuesta es desventajosa para 85 sorteos y ventajosa para 86.

Consideremos otra vez dos jugadores, A y B, jugando caras y cruces de manera tal que, en cada tirada, si sale cara A le da una mesada a B, quien da una si sale cruz. El número de mesadas de B es limitado, mientras que el de A es ilimitado, y el juego termina sólo cuando B ya no tenga más mesadas. Preguntamos en cuántas tiradas debe uno apostar uno contra uno que el juego termine. La expresión de la probabilidad de que el juego termine en un número *i* de tiradas está dada por una serie que comprende un gran número de términos y factores si el número de mesadas de B es considerable; la búsqueda por el valor del [número] desconocido *i* que hace que esta serie sea $\frac{1}{2}$ sería imposible si no redujéramos la misma a una serie muy convergente. Al aplicarle el método recién tratado, encontramos una expresión muy simple para el [número] desconocido de la que resulta que si, por ejemplo, B tiene un centenar de mesadas, es una apuesta un tanto menor de uno contra uno que el juego termine en 23780 tiradas, y una apuesta un tanto mayor de uno contra uno que termine en 23781 tiradas.

Estos dos ejemplos, añadidos a los que ya hemos ofrecido, son suficientes para mostrar cómo los problemas de los juegos han contribuido a la perfección del análisis.

CAPÍTULO VII

ACERCA DE LAS DESIGUALDADES DESCONOCIDAS QUE PUEDEN EXISTIR ENTRE POSIBILIDADES QUE SE SUPONE SON IGUALES

Las desigualdades de este tipo tienen, sobre los resultados del cálculo de probabilidades, una influencia sensible que merece una atención particular. Tomemos el juego de caras y cruces, y supongamos que es igualmente fácil sacar uno u otro lado de la moneda. Entonces la probabilidad de sacar cara en el primer lanzamiento es $\frac{1}{2}$ y la de sacarla dos veces en sucesión es $\frac{1}{4}$. Pero si en la moneda existe una desigualdad que causa que aparezca uno de los lados en lugar del otro sin saber qué lado se ve favorecido por esta desigualdad, la probabilidad de sacar cara en el primer lanzamiento siempre será $\frac{1}{2}$; debido a que ignoramos qué lado es favorecido por la desigualdad, la probabilidad del simple evento aumenta si esta desigualdad es favorable a él, tanto como disminuye si es contraria a él. Pero en esta misma ignorancia aumenta la probabilidad de sacar cara dos veces en sucesión. En efecto, esta probabilidad es la de sacar cara en el primer lance multiplicada por la probabilidad de que, habiéndola sacado en el primer lance, será sacada en el segundo; pero su ocurrencia en el primer lance es una razón para creer que la desigualdad de la moneda la favorece. La desigualdad desconocida incrementa, entonces, la probabilidad de sacar cara en el segundo lance, y consecuentemente incrementa el producto de estas dos probabilidades. Con el fin de someter este asunto al cálculo, supongamos que esta desigualdad incrementa por un veinteavo la probabilidad del simple evento cuando lo favorece. Si este evento es [sacar] cara, su probabilidad será $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{20}$, o $\frac{11}{20}$, y la probabilidad de sacarla dos veces en sucesión será el cuadrado de $\frac{11}{20}$, o $\frac{121}{400}$. Si el evento favorecido es [sacar] cruz, la probabilidad de sacar cara será $\frac{1}{2}$ menos $\frac{1}{20}$, o $\frac{9}{20}$, y la probabilidad de sacarla dos veces en sucesión será $\frac{81}{400}$. Ya que al principio no tenemos ninguna razón para creer que la desigualdad favorece uno de estos eventos en lugar del otro, es claro que para tener la probabilidad del evento compuesto cabeza/cabeza, es necesario añadir las dos probabilidades anteriores y tomar la mitad de su suma, lo que da

$\frac{101}{400}$ para esta probabilidad, que excede $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{400}$ o por el cuadrado del favor $\frac{1}{20}$ que la desigualdad añade a las posibilidades del evento que favorece. La probabilidad de sacar cruz/cruz es similarmente $\frac{101}{400}$, pero la probabilidad de sacar cara/cruz o cruz/cara es cada una $\frac{99}{400}$, pues la suma de estas cuatro probabilidades debe igualar la certeza o la unidad. Encontramos así que, por lo general, las causas constantes y desconocidas que favorecen eventos simples que son juzgados como igualmente posibles siempre incrementan la probabilidad de la repetición del mismo evento simple.

En un número par de lances, cara y cruz deben ambas suceder o bien un número par de veces o un número non de veces. La probabilidad de cada uno de estos casos es $\frac{1}{2}$ si las posibilidades de los dos lados son iguales; pero si entre ellos hay una desigualdad desconocida, esta desigualdad siempre es favorable al primer caso.

Dos jugadores cuya habilidad es supuestamente igual juegan bajo las condiciones de que en cada lance aquel que pierde da una mesada a su adversario, y que el juego continúa hasta que uno de los jugadores ya no tenga más mesadas. El cálculo de las probabilidades nos muestra que, en aras de la igualdad del juego, los lances de los jugadores deben estar en proporción inversa a sus mesadas. Pero si entre los jugadores hay una pequeña desigualdad, favorece a aquel que tenga el menor número de mesadas. Su probabilidad de ganar el juego aumenta si los jugadores acuerdan duplicar o triplicar sus mesadas, y será $\frac{1}{2}$ o la misma que la probabilidad del otro jugador en el caso en el que el número de sus mesadas se vuelva infinito, siempre preservando la misma proporción.

Uno puede corregir la influencia de estas desigualdades desconocidas al someterlas a las posibilidades del azar. Así, en el juego de caras y cruces, si uno tiene una segunda moneda que es arrojada cada vez con la primera, y acuerda nombrar constantemente "cara" al lado que sale con la segunda moneda, la probabilidad de sacar cara dos veces en sucesión con la primera moneda se acercará mucho más a $\frac{1}{4}$ que en el caso de una sola moneda. En este último caso, la diferencia es el cuadrado del pequeño incremento de posibilidad que la desigualdad desconocida da al lado de la primera moneda que favorece; en el otro caso esta diferencia es el producto cuádruple de este cuadrado por el correspondiente cuadrado relativo a la segunda moneda.

Arrójense en una urna cien números del 1 al 100 en el orden de numeración, y después de haber sacudido la urna para mezclar los números, sáquese uno. Es claro que si la sacudida se ha hecho bien, las probabilidades de sacar los números serán las mismas. Pero si tememos que haya algunas pequeñas diferencias dependientes del orden de acuerdo con el cual han sido arrojados los números en la urna, disminuiremos considerablemente estas diferencias al arrojar, en una segunda urna, los números de acuerdo con el orden de su saque de la primera urna, y después al sacudir esta segunda urna para mezclar los números. Una tercera, cuarta, etc., urnas disminuirán más y más estas diferencias ya inapreciables en la segunda urna.

CAPÍTULO VIII

ACERCA DE LAS LEYES DE PROBABILIDAD QUE RESULTAN DE LA MULTIPLICACIÓN INDEFINIDA DE EVENTOS

Entre las causas variables y desconocidas que comprendemos bajo el nombre de *azar,* y que hacen incierta e irregular la marcha de los eventos, vemos aparecer, en la medida en que se multiplican, una sorprendente regularidad que parece aferrarse a un diseño y que ha sido considerada como prueba de la Providencia. Pero al reflexionar sobre esto pronto reconocemos que esta regularidad es solamente el desarrollo de las respectivas posibilidades de eventos simples que deben presentarse más a menudo cuando son más probables. Imaginemos, por ejemplo, una urna que contiene bolas blancas y bolas negras, y supongamos que cada vez que se saca una bola, vuelve a ponerse en la urna antes de sacar una nueva. La proporción del número de las bolas blancas sacadas al número de bolas negras sacadas será más a menudo muy irregular en los primeros saques, pero las causas variables de esta irregularidad producen efectos alternativamente favorables y desfavorables a la marcha regular de los eventos que se destruyen mutuamente en la totalidad de un gran número de saques, permitiéndonos percibir cada vez más la proporción de bolas blancas a las bolas negras contenidas en la urna, o las respectivas posibilidades de sacar una bola blanca o una negra en cada saque. De esto resulta el siguiente teorema.

La probabilidad de que la proporción del número de bolas blancas sacadas al número total de bolas sacadas no se desvíe más allá de un intervalo dado de la proporción del número de bolas blancas al número total de bolas contenidas en la urna, se acerca indefinidamente a la certeza por la multiplicación indefinida de eventos, por más pequeño que sea este intervalo.

Este teorema, señalado por el sentido común, fue muy difícil de demostrar por el análisis. En consecuencia, el ilustre geómetra Jacques Bernoulli, quien fue el primero en ocuparse de él, da mucha importancia a las demostraciones que ha ofrecido. El cálculo de funciones discriminantes aplicado a esta materia no sólo demuestra este teorema con facilidad, sino que da la probabilidad de que la proporción de los eventos observados se desvíe solamente en ciertos límites de la verdadera proporción de sus respectivas posibilidades.

Del teorema anterior uno puede sacar esta consecuencia, que debe considerarse como una ley general, a saber, que las proporciones de los actos de la naturaleza son casi constantes cuando estos actos son considerados en un gran número. Así, a pesar de la variedad de los años, la suma de las producciones durante un número considerable de años es sensiblemente la misma; así que el hombre, por la previsión de utilidad, es capaz de precaverse de la irregularidad de las sesiones mediante la igual propagación durante todas las estaciones de los bienes que la naturaleza distribuye desigualmente. De la ley anterior no exceptúo los resultados debidos a causas morales. La proporción de nacimientos anuales a la población, y la de matrimonios a nacimientos, muestran sólo pequeñas variaciones; en París, el número de nacimientos anuales es casi el mismo, y en sesiones ordinarias de la oficina de correos he escuchado que el número de cartas descartadas a cuenta de direcciones inexistentes cambia muy poco año con año; esto también se ha observado en Londres.

De este teorema se sigue, de nuevo, que en una serie de eventos prolongados indefinidamente la acción de causas regulares y constantes debe prevalecer a la larga sobre la [acción] de causas irregulares. Esto es lo que hace que las ganancias de las loterías sean tan ciertas como los productos de la agricultura; las posibilidades que reservan les aseguran un beneficio en la totalidad de un gran número de sorteos. Así, estando las numerosas y favorables posibilidades constantemente adheridas a la observación de los eternos principios de la razón, de la justicia, y de la humanidad que establece y conserva sociedades, hay una gran ventaja en conformarse a estos principios y un grave inconveniente en apartarse de ellos. Si uno consulta las historias y su propia experiencia, verá que todos los hechos vienen en ayuda de este resultado del cálculo. Consideremos los felices efectos de las instituciones fundadas en la razón y en los derechos naturales del hombre entre las gentes que han sabido cómo establecerlas y preservarlas. Consideremos también las ventajas que ha procurado la buena fe para los gobiernos que han hecho de ella la base de su conducta y cómo se han visto indemnizados por los sacrificios que les ha costado mantener sus compromisos con una escrupulosa exactitud. ¡Qué crédito tan inmenso en casa! ¡Qué preponderancia fuera de casa! Por el contrario, véase en qué abismo de desgracias se han precipitado las naciones por la ambición y la perfidia de sus dirigentes. Siempre que una gran potencia intoxicada por el amor de conquista aspira a la dominación universal, el sentimiento de independencia entre las naciones amenazadas produce una coalición de la que siempre se vuelve la víctima. Similarmente, en medio de las causas variables que extienden o contienen a los diversos estados, los límites naturales actuando como causas constantes deben terminar prevaleciendo. Es entonces importante, tanto para la estabilidad como para la felicidad de los imperios, no extenderse más allá de aquellos límites en los que sin cesar son conducidos de nuevo por la acción de las causas, justo como las aguas de los mares alborotadas por tempestades violentas vuelven a sus cuencas por la fuerza de gravedad. Es, una vez más, un resultado del cálculo de probabilidades confirmado por numerosas y melancólicas experiencias. La historia considerada desde el punto de vista de la influencia de causas constantes uniría al interés de la curiosidad el de ofrecer al hombre las lecciones más valiosas. A veces atribuimos los resultados inevitables de estas causas a las circunstancias accidentales que han producido su acción. Va en contra de la naturaleza de las cosas que, por ejemplo, un pueblo sea gobernado por otro cuando los separa un vasto mar o una gran distancia. Se puede afirmar que en el largo plazo esta causa constante, uniéndose sin cesar con las causas variables que actúan en el mismo camino y que el curso del tiempo desarrolla, acabarán por resultar suficientemente fuertes como para darle a un pueblo subyugado su independencia natural o para unirlo con un estado poderoso contiguo.

En un gran número de casos, y estos son los más importantes del análisis de riesgos, son desconocidas las posibilidades de eventos simples, y nos vemos forzados a buscar en eventos pasados los indicios que puedan guiar nuestras conjeturas acerca de las causas sobre las cuales dependen. Al aplicar el análisis de funciones discriminantes al principio elucidado arriba sobre la probabilidad de las causas sacadas de los eventos observados, llegamos al siguiente teorema.

Cuando un evento simple o uno compuesto por varios eventos simples como, por ejemplo, en un juego, se ha repetido un gran número de veces, las posibilidades de los eventos simples que hacen más probable aquello que se ha observado son aquellas que la observación indica con la mayor probabilidad; en la medida en que el evento observado se repite, esta probabilidad aumenta y terminaría por equivaler a certeza si los números de repeticiones se hiciesen infinitos.

Hay dos tipos de aproximaciones: la primera es relativa a los límites tomados en todos los lados de las posibilidades que dan al pasado la mayor probabilidad; la otra aproximación está relacionada con la probabilidad de que estas posibilidades caigan dentro de estos límites. La repetición del evento compuesto aumenta más y más esta probabilidad, los límites siguiendo siendo los mismos, y reduce más y más el intervalo de estos límites, la probabilidad siguiendo siendo la misma; en el infinito, este intervalo se vuelve cero y la probabilidad cambia a certeza.

Si aplicamos este teorema a la proporción de los nacimientos de niños con los de niñas observado en los distintos países de Europa, encontramos que esta proporción, que es en todas partes aproximadamente igual a la de 22 a 21, indica con una probabilidad extrema una mayor facilidad en el nacimiento de niños. Considerando además que es la misma en Nápoles y en San Petersburgo, veremos que a este respecto la influencia del clima no tiene efecto. Podríamos entonces sospechar, contrariamente a la creencia común, que este predominio de nacimientos masculinos existe incluso en oriente. En consecuencia, he invitado a los eruditos franceses enviados a Egipto a que se ocupen de esta interesante cuestión, pero la dificultad en obtener información exacta sobre los nacimientos no les ha permitido resolverla. Felizmente, M. de Humboldt no ha descuidado este asunto entre las innumerables nuevas cosas que ha observado y reunido en América con tanta sagacidad, constancia, y coraje. En la zona tropical ha encontrado la misma proporción de los nacimientos que observamos en París, y esto debe hacernos considerar el mayor número de nacimientos masculinos como una ley general de la raza humana. Las leyes que los distintos tipos de animales siguen a este respecto me parecen ser dignas de la atención de los naturalistas.

El hecho de que la proporción de nacimientos de niños con los de niñas difiera muy poco de la unidad incluso en el gran número de nacimientos observados en un lugar ofrecería en este aspecto un resultado contrario a la ley general, sin el cual tendríamos razón en concluir que esta ley no existe. Para llegar a este resultado es necesario emplear grandes números y estar seguros de que está indicado con gran probabilidad. En su *Aritmética política* Buffon da cuenta, por ejemplo, de varias comunidades de Borgoña donde los nacimientos de niñas han superado los de niños. Entre estas comunidades la de Carcelle-le Grignon presenta, en 2009 nacimientos durante cinco años, 1026 niñas y 983 niños. Aunque estos números son considerables, indican no obstante sólo una mayor posibilidad en los nacimientos de niñas con una probabilidad de $\frac{9}{10}$, y esta probabilidad, menor que la de no sacar cara cuatro veces en sucesión en el juego de caras y cruces, no es suficiente para investigar la causa de esta anomalía, que, de acuerdo con toda probabilidad, desaparecería si uno siguiera durante un siglo los nacimientos en esta comunidad.

Los registros de nacimientos, que se conservan con cuidado para asegurar la condición de los ciudadanos, pueden servir para determinar la población de un gran imperio sin [tener que] recurrir al conteo de sus habitantes (una operación laboriosa y difícil de hacer con exactitud). Pero para esto es necesario conocer la proporción de la población con los nacimientos anuales. El medio más preciso para obtenerla consiste, primero, en elegir en el imperio distritos distribuidos de una manera casi igual sobre toda su superficie, a fin de hacer el resultado general independiente de circunstancias locales; segundo, en contar con cuidado, para una época dada, los habitantes de varias comunidades en cada uno de estos distritos; tercero, en determinar, desde la declaración de los nacimientos durante varios años que preceden y siguen a esta época, el número medio correspondiente a los nacimientos anuales. Este número, dividido por el de los habitantes, dará la proporción de los nacimientos anuales con la población de un modo más y más preciso a medida que el conteo se vuelve más considerable. El gobierno, convencido de la utilidad de un conteo similar, ha decidido a petición mía ordenar su ejecución. En treinta distritos extendidos por igual en toda Francia, se han elegido comunidades capaces de proporcionar la información más exacta. Sus conteos han dado 2037615 individuos como el número total de sus habitantes al 23 de septiembre de 1802. La declaración de los nacimientos en estas comunidades durante los años 1800, 1801, y 1802 es:

Nacimientos	Matrimonios	Muertes
110312 niños	46037	103659 hombres
105287 niñas		99443 mujeres

La proporción de la población con nacimientos anuales es entonces $28\frac{352845}{1000000}$; es mayor que la que se había estimado hasta este tiempo. Al multiplicar el número de nacimientos anuales en Francia por esta proporción, tendremos la población de este reino. Pero, ¿cuál es la probabilidad de que la población así determinada no se desvíe de la población real más allá de un cierto límite? Resolviendo este problema y aplicando a su solución los datos anteriores, he encontrado que, suponiendo que el número de nacimientos anuales en Francia sea 1000000, lo que lleva a la población a 28352845 habitantes, es una apuesta de casi 300000 contra 1 que el error de este resultado no es de medio millón.

La proporción de los nacimientos de niños con los de niñas que ofrece la declaración anterior es de 22 a 21, y los matrimonios son a los nacimientos como 3 es a 4.

En París, los bautismos de niños de ambos sexos varían un poco de la proporción de 22 a 21. Desde 1745, la época en la que uno ha comenzado a distinguir los sexos en los registros de nacimiento, hasta finales de 1784, en esta capital se han bautizado a 393386 niños y a 377555 niñas. La proporción de los dos números es casi la de 25 a 24; parece entonces que en París una causa particular aproxima una igualdad de bautismos de los dos sexos. Si a esta cuestión aplicamos el cálculo de probabilidades, encontramos que es una apuesta de 238 a 1 a favor de la existencia de esta causa, lo que es suficiente para autorizar la investigación. Después de reflexionar, me ha parecido que la diferencia observada se debe a que los padres en el campo y en las provincias, encontrando alguna ventaja en mantener a los niños en casa, han enviado al Hospital para los Expósitos en París a menos de ellos relativo al número de niñas de acuerdo con la proporción de nacimientos de los dos sexos. Esto lo prueba la declaración de registros de este hospital. Desde comienzos de 1745 hasta finales de 1809, entraron 163499 niños y 159405 niñas. El primero de estos números excede sólo por $\frac{1}{38}$ al segundo, que debería haber superado al menos por $\frac{1}{24}$. Esto confirma la existencia de la causa asignada, a saber, que la proporción de nacimientos de niños con aquellos de niñas es, en París, la de 22 a 21, sin haber prestado atención a los expósitos.

Los resultados anteriores suponen que podemos comparar los nacimientos con los saques de bolas de una urna que contiene un número infinito de bolas blancas y bolas negras mezcladas de modo que en cada saque las posibilidades de extracción deberían ser las mismas para cada bola; pero es posible que las variaciones de las mismas estaciones en distintos años puedan tener alguna influencia sobre la proporción anual de los nacimientos de niños con aquellos de niñas. El *Bureau des Longitudes* de Francia publica cada año en su anuario las tablas del movimiento anual de la población del reino. Las tablas ya publicadas comienzan en 1817; en ese año y en los cinco siguientes, nacieron 2962361 niños y 2781997 niñas, lo que da alrededor de $\frac{16}{15}$ para la proporción de los nacimientos de niños con los de niñas. Las proporciones de cada año varían poco de este resultado medio; la proporción más pequeña es la de 1822, cuando sólo fue de $\frac{17}{16}$, y la mayor es la del año 1817, cuando fue $\frac{15}{14}$. Estas proporciones varían apreciablemente de la proporción de $\frac{22}{21}$ descubierta arriba. Aplicando a esta desviación el análisis de probabilidades en la hipótesis de la comparación de nacimientos con las extracciones de bolas de una urna, encontramos que sería apenas probable. Parece entonces indicar que esta hipótesis, aunque muy aproximada, no es rigurosamente exacta. En el número de nacimientos recién expuestos hay de hijos naturales 200494 niños y 190698 niñas. La proporción de nacimientos masculinos y femeninos era entonces en este aspecto de $\frac{20}{19}$, menor que la proporción media de $\frac{16}{15}$. Este resultado está en el mismo sentido que el de los nacimientos de expósitos, y parece probar que en la clase de hijos naturales los nacimientos de los dos sexos se acercan más a la igualdad que en la clase de hijos legítimos. Las diferencias climáticas entre el norte y el sur de Francia no parecen tener influencia apreciable sobre la proporción de los nacimientos de niños y niñas. Los treinta distritos más sureños han dado $\frac{16}{15}$ para esta proporción, la misma que la de toda Francia.

La constancia de la superioridad de los nacimientos de niños sobre niñas en París y en Londres desde que se han observado les ha parecido a algunos eruditos ser una prueba de la Providencia, sin la cual han pensado que las causas irregulares que perturban sin cesar al curso de eventos deberían haber hecho varias veces que los nacimientos anuales de niñas fuesen superiores a los de niños.

Pero esta prueba es un nuevo ejemplo del abuso que tantas veces se ha hecho de las causas finales, que siempre desaparecen ante un examen de las cuestiones cuando tenemos los datos necesarios para resolverlas. La constancia en cuestión es un resultado de causas regulares que dan la superioridad a los nacimientos de niños y que la extienden a las anomalías debidas al azar cuando el número de nacimientos anuales es considerable. La investigación de la probabilidad de que esta constancia se mantenga durante mucho tiempo pertenece a aquella rama del análisis de riesgos que pasa desde eventos pasados hasta la probabilidad de eventos futuros, y tomando por base los nacimientos observados desde 1745 hasta 1784, es una apuesta de casi 4 contra 1 que en París los nacimientos anuales de niños superarán constantemente por un siglo a los nacimientos de niñas; no hay razón para sorprenderse de que esto haya tenido lugar por medio siglo.

Tomemos otro ejemplo del desarrollo de proporciones constantes que presentan los eventos en la medida en que son multiplicados. Imaginemos una serie de urnas dispuestas circularmente, cada una conteniendo un gran número de bolas blancas y negras, siendo la proporción de bolas blancas con las negras originalmente muy distinta y tal que, por ejemplo, una de estas urnas contiene sólo bolas blancas, mientras que otra contiene sólo bolas negras. Si uno saca una bola de la primera urna para ponerla en la segunda, y si después de haber sacudido la segunda urna con el fin de mezclar bien la nueva bola con las otras, uno saca una bola para ponerla en la tercera urna, y así hasta la última urna, de la cual se saca una bola para ponerla en la primera, y si esta serie se reinicia continuamente, el análisis de probabilidad nos muestra que las proporciones de las bolas blancas con las negras en estas urnas terminarán por ser las mismas e iguales que la proporción de la suma de todas las bolas blancas con la suma de todas las bolas negras contenidas en las urnas. Así, por este modo regular de cambio, eventualmente desaparece la primitiva irregularidad de estas proporciones para dar lugar al orden más simple. Ahora, si entre estas urnas uno intercala nuevas [urnas] en las que la proporción de la suma de las bolas blancas a la suma de las bolas negras que contienen difiere de la anterior, continuando indefinidamente en la totalidad de las urnas con las extracciones recién indicadas, el orden simple establecido en las viejas urnas se verá perturbado en un principio, y las proporciones de las bolas blancas a las bolas negras se volverán irregulares; pero poco a poco esta irregularidad desaparecerá para dar lugar a un nuevo orden que finalmente será el de la igualdad de las proporciones de las bolas blancas a las bolas negras contenidas en las urnas. Podemos aplicar estos resultados a todas las combinaciones de la naturaleza en las que las fuerzas constantes por las que se animan sus elementos establecen modos regulares de acción, adecuados para llevar a cabo, en el propio corazón del caos, sistemas gobernados por leyes admirables.

Los fenómenos que parecen ser los más dependientes del azar presentan entonces, una vez multiplicados, una tendencia a acercarse sin cesar a proporciones fijas de un modo tal que, si concebimos en todos los lados de cada una de estas proporciones un intervalo tan pequeño como queramos, la probabilidad de que el resultado medio de las observaciones caiga dentro de este intervalo terminará por diferir de la certeza sólo por una cantidad mayor que una magnitud asignable. Así, por los cálculos de probabilidades aplicados a un gran número de observaciones podemos reconocer la existencia de estas proporciones. Pero antes de buscar las causas es necesario, para no llegar a especulaciones vanas, asegurarnos de que estén indicadas por una probabilidad que no nos permita considerarlas como anomalías debidas al azar. La teoría de funciones discriminantes nos ofrece una expresión muy sencilla para esta probabilidad, que se obtiene al integrar el producto de la diferencial de la cantidad de la cual el resultado deducido de un gran número de observaciones varía de la verdad por una constante menor que la unidad, dependiente de la naturaleza del problema, y elevada a una potencia cuyo exponente es la proporción del cuadrado de esta variación al número de observaciones. La integral tomada entre los límites dados y divididos por la misma integral, aplicada a un infinito positivo y a uno negativo, expresará la probabilidad de que la variación de la verdad esté comprendida entre estos límites. Tal es la ley general de la probabilidad de resultados indicada por un gran número de observaciones.

CAPÍTULO IX

LA APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES A LA FILOSOFÍA NATURAL

Los fenómenos de la naturaleza suelen estar envueltos por tantas circunstancias extrañas, y su influencia es una mezcla de un gran número de causas perturbadoras, que resulta muy difícil reconocerlos. Podemos llegar a ellos sólo multiplicando las observaciones o las experiencias, de modo que los efectos extraños finalmente se destruyan recíprocamente, los resultados medios poniendo en evidencia tales fenómenos y sus diversos elementos. Entre más numeroso sea el número de observaciones y menos varíen entre ellas, más se acercarán sus resultados a la verdad. Cumplimos con esta condición por la elección de los métodos de observación, por la precisión de los instrumentos, y por el cuidado que tomamos al observar de cerca; entonces determinamos, con la teoría de probabilidades, los resultados medios más ventajosos o aquellos que dan el menor valor de error. Pero eso no es suficiente; también es necesario apreciar la probabilidad de que los errores de estos resultados estén comprendidos en los límites dados, y sin esto solamente tenemos un conocimiento imperfecto del grado de exactitud obtenido. Las fórmulas apropiadas para estas cuestiones son verdaderas mejoras del método de las ciencias, y ciertamente es importante añadirlas a este método. El análisis que requieren es lo más delicado y difícil de la teoría de probabilidades, y es uno de los objetos principales del trabajo que he publicado sobre esta teoría, en el que he llegado a fórmulas de este tipo que tienen la notable ventaja de ser independientes de la ley de la probabilidad de errores y de incluir únicamente las cantidades dadas por las propias observaciones y sus expresiones.

Cada observación tiene, por expresión analítica, una función de los elementos que queremos determinar, y si éstos son casi conocidos, esta función se vuelve una función lineal de sus correcciones. Al igualarla con la propia observación se forma una *ecuación de condición*. Si tenemos un gran número de ecuaciones similares, las combinamos de una manera tal como para obtener tantas ecuaciones finales como hayan elementos cuyas correcciones determinamos resolviendo estas ecuaciones. Pero, ¿cuál es el modo más ventajoso de combinar ecuaciones de condición para obtener ecuaciones finales? ¿Cuál es la ley de las probabilidades de errores de los cuales los elementos siguen siendo susceptibles que saquemos de ellos? Esto nos lo aclara la teoría de probabilidades. La formación de una ecuación final por medio de la ecuación de condición equivale a multiplicar cada una de éstas por un factor indeterminado y a unir los productos; es necesario elegir el sistema de factores que dé la menor oportunidad para el error. Pero es evidente que si multiplicamos los posibles errores de un elemento por sus respectivas probabilidades, el sistema más ventajoso será aquel en el que la suma de estos productos tomados todos positivamente sea un *mínimo*, pues un error positivo o uno negativo debe considerarse como una pérdida. Formando, entonces, esta suma de productos, la condición del *mínimo* determinará al sistema de factores que es conveniente adoptar, o al sistema más ventajoso. Encontramos así que este sistema es el de los coeficientes de los elementos en cada ecuación de condición; de modo que formamos una primera ecuación final al multiplicar respectivamente cada ecuación de condición por su coeficiente del primer elemento y al unir todas estas ecuaciones así multiplicadas. Formamos una segunda ecuación final al emplear, del mismo modo, los coeficientes del segundo elemento, y así sucesivamente. De esta manera se desarrollan con la mayor evidencia los elementos y las leyes de los fenómenos obtenidos en la colección de un gran número de observaciones.

La probabilidad de los errores que cada elemento todavía deja a ser temido es proporcional al número cuyo logaritmo hiperbólico es la unidad elevada a una potencia igual al cuadrado del error tomado como una cantidad negativa multiplicada por un coeficiente constante que puede considerarse como el módulo de la probabilidad de los errores, ya que, el error permaneciendo igual, su probabilidad decrece con rapidez cuando el primero aumenta; así que el elemento obtenido pesa, si se me permite hablar así en lo tocante a la verdad, mucho más a medida que este módulo es mayor. Por esta razón llamaré a este módulo el *peso* del elemento o del resultado. Este peso es el mayor posible en el sistema de factores – el más ventajoso; es lo que da a este sistema su superioridad sobre otros. Por una notable analogía de este peso con aquellos de los cuerpos comparados en su centro de gravedad común, resulta que si el mismo elemento está dado por diversos sistemas, cada uno compuesto de un gran número de observaciones, el más ventajoso, el resultado medio de su totalidad es la suma de los productos de cada resultado parcial por su peso. Más todavía, el peso total de los resultados de los diversos sistemas es la suma de sus pesos parciales, de modo que la probabilidad de los errores del resultado medio de su totalidad es proporcional al número que tiene unidad por un logaritmo hiperbólico elevado a una potencia igual al cuadrado del error tomado como negativo y multiplicado por la suma de los pesos. Cada peso depende, en verdad, de la ley de la probabilidad de error de cada sistema, y casi siempre esta ley es desconocida; pero felizmente he podido eliminar el factor que la contiene por medio de la suma de los cuadrados de las variaciones de las observaciones en este sistema de su resultado medio. Entonces sería deseable, con el fin de completar nuestro conocimiento de los resultados obtenidos por la totalidad de un gran número de observaciones, que al lado de cada resultado escribamos el peso que le corresponde; para este objeto el análisis proporciona métodos generales y sencillos. Cuando de este modo hemos obtenido la exponencial que representa la ley de la probabilidad de errores, tendremos la probabilidad de que el error del resultado esté incluido dentro de límites dados al tomar, dentro de los límites, la integral del producto de esta exponencial por la diferencial del error y al multiplicarla por la raíz cuadrada del peso del resultado dividido por la circunferencia cuyo diámetro es la unidad. Por lo tanto se sigue que, para la misma probabilidad, los errores de los resultados son recíprocos a las raíces cuadradas de sus pesos, lo que sirve para comparar su respectiva precisión.

Con el fin de aplicar este método exitosamente, es necesario [hacer] variar las circunstancias de las observaciones o las experiencias de un modo tal que puedan evitarse las causas de error constantes. Es necesario que las observaciones sean numerosas, y que sean tantas más como haya más elementos a determinar, pues el peso del resultado medio aumenta como el número de observaciones dividido por el número de los elementos. Todavía es necesario que los elementos sigan en estas observaciones un curso distinto, pues si el curso de los dos elementos fuese exactamente el mismo, lo que haría proporcionales a sus coeficientes en la ecuación de condiciones, estos elementos solamente formarían una sola cantidad desconocida, y sería imposible distinguirlos por estas observaciones. Finalmente, es necesario que las observaciones sean precisas; esta condición, la primera de todas, aumenta considerablemente el peso del resultado cuya expresión tiene por divisor a la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones de este resultado. Con estas precauciones hemos de ser capaces de hacer uso del método anterior y de medir el grado de confianza que ameritan los resultados deducidos de un gran número de observaciones.

La regla recién ofrecida para concluir ecuaciones de condición, ecuaciones finales, equivale a hacer un mínimo la suma de los cuadrados de los errores de observaciones, pues cada ecuación de condición se vuelve exacta al sustituir en ella la observación más su error, y si desde ella sacamos la expresión de este error, es fácil ver que la condición del *mínimo* de la suma de los cuadrados de estas expresiones da la regla en cuestión. Esta regla es más precisa a medida que las observaciones son más numerosas, pero incluso en el caso donde su número sea pequeño parece natural emplear la misma regla que, en todos los casos, ofrece un medio simple para obtener, sin tanteos, las correcciones que buscamos determinar. También sirve para comparar la precisión de las diversas tablas astronómicas de la misma estrella. Estas tablas siempre pueden suponerse como reducidas a la misma forma, y entonces únicamente difieren en cuanto a las épocas, los movimientos medios, y los coeficientes de los argumentos, pues si una de ellas contiene un coeficiente que no se encuentra en las otras, es claro que esto equivale a suponer cero en ellas en cuanto al coeficiente de este argumento. Si ahora rectificamos estas tablas por la totalidad de las observaciones buenas, satisfarían la condición de que la suma de los cuadrados de los errores sea un mínimo; las tablas que, comparadas con un número considerable de observaciones, se acerquen más a esta condición merecen entonces la preferencia.

Es principalmente en la astronomía que puede emplearse con ventaja el método explicado arriba. Las tablas astronómicas deben la verdaderamente asombrosa exactitud que han alcanzado a la precisión de observaciones y de teorías, así como al uso de ecuaciones de condiciones que hacen que concurran un gran número de excelentes observaciones en la corrección del mismo elemento. Pero queda por determinar la probabilidad de los errores que esta corrección deja todavía a temer; y el método que recién he explicado nos permite reconocer la probabilidad de estos errores. Con el fin de ofrecer algunas aplicaciones interesantes de él, me he beneficiado del inmenso trabajo que el Sr. Bouvard acaba de terminar sobre los movimientos de Júpiter y Saturno, de los cuales ha formado tablas muy precisas. Ha discutido, con el mayor cuidado, las oposiciones y cuadraturas de estos dos planetas observados por Bradley y por los astrónomos que lo han seguido hasta los últimos años; ha concluido las correcciones de los elementos de su movimiento y sus masas comparados con los del sol tomado como unidad. Sus cálculos dan que la masa de Saturno es igual a la 3512ava parte de la del sol. Aplicando a ellos mis fórmulas de probabilidad, encuentro que es una apuesta de 11,000 contra uno que el error de este resultado no es $\frac{1}{100}$ de su valor o, lo que equivale a casi lo mismo, que después de un siglo de nuevas observaciones añadidas a las anteriores, y examinadas del mismo modo, el nuevo resultado no diferirá por $\frac{1}{100}$ del resultado del Sr. Bouvard. Este sabio astrónomo también encuentra que la masa de Júpiter es igual a la 107ava parte del sol, y mi método de probabilidad da una apuesta de 1, 000,000 a uno de que este resultado no es $\frac{1}{100}$ en error.

Este método también puede emplearse con éxito en las operaciones geodésicas. Determinamos la longitud del gran arco sobre la superficie de la Tierra por [medio de la] triangulación, que depende de una base medida con exactitud. Pero sea cual sea la precisión que pueda llevarse a la medida de los ángulos, los inevitables errores pueden causar, por acumulación, que el valor del arco concluido desde un gran número de triángulos se desvíe apreciablemente de la verdad. Entonces sólo reconocemos este valor imperfectamente a menos que pueda asignarse la probabilidad de que su error esté comprendido dentro de límites dados. El error de un resultado geodésico es una función de los errores de los ángulos de cada triángulo. En el trabajo citado he ofrecido fórmulas generales para obtener la probabilidad de los valores de una o varias funciones lineales de un gran número de errores parciales de los cuales conocemos la ley de probabilidad; entonces podemos, por medio de estas fórmulas, determinar la probabilidad de que el error de un resultado geodésico esté contenido dentro de límites asignados, sea cual sea la ley de la probabilidad de errores parciales. Es todavía más necesario independizarnos de la ley, porque las leyes más simples son siempre infinitamente menos probables, viendo el infinito número de aquellas que pueden existir en la naturaleza. Pero la desconocida ley de errores parciales introduce en las fórmulas un indeterminado que no permite reducirlas a números a menos que podamos eliminarlo. Hemos visto que en las cuestiones astronómicas, donde cada observación proporciona una ecuación de condición para obtener los elementos, eliminamos este indeterminado por medio de la suma de los cuadrados de los residuos cuando los valores más probables de los elementos han sido sustituidos en cada ecuación.

Ya que las cuestiones geodésicas no ofrecen ecuaciones similares, es necesario buscar otro medio de eliminación. La cantidad por la cual la suma de los ángulos de cada triángulo observado supera dos ángulos rectos más el exceso esférico proporciona este medio. Así, remplazamos por la suma de los cuadrados de estas cantidades la suma de los cuadrados de los residuos de las ecuaciones de condición, y podemos asignar numéricamente la probabilidad de que el error del resultado final de una serie de operaciones geodésicas no exceda una cantidad dada. Pero, ¿cuál es la forma más ventajosa de dividir, entre los tres ángulos de cada triángulo, la suma observada de sus errores? El análisis de probabilidades hace evidente que cada ángulo debe disminuirse por un tercio de esta suma, siempre que el peso de un resultado geodésico sea el mayor posible, lo que hace al mismo error menos probable. Hay entonces una gran ventaja en observar los tres ángulos de cada triángulo y en corregirlos tal como hemos dicho. El sentido común señala esta ventaja, pero el solo cálculo de probabilidades es capaz de apreciarla y de hacer evidente que, por esta corrección, se vuelve la mayor posible.

Con el fin de garantizar la exactitud del valor de un gran arco que descansa sobre una base medida en una de sus extremidades, uno mide una segunda base hacia la otra extremidad, y concluye desde una de estas bases la longitud de la otra. Si esta longitud varía muy poco de la observación, hay toda razón para creer que la cadena de triángulos que une estas bases es casi exacta, y que también lo es el valor del gran arco que resulta de ella. Uno corrige, entonces, este valor al modificar los ángulos de los triángulos de modo tal que la base se calcule de acuerdo con las bases medidas. Pero esto puede hacerse de infinitos modos, de entre los cuales es preferible aquel del cual el resultado geodésico tiene el mayor peso, en la medida en que el mismo error se vuelve menos probable. El análisis de probabilidades ofrece fórmulas para obtener directamente la corrección más ventajosa que resulte de las mediciones de las varias bases y las leyes de probabilidad que hace la multiplicidad de las bases, leyes que muy rápidamente se vuelven decrecientes por esta multiplicidad.

Por lo general, los errores de los resultados deducidos de un gran número de observaciones son las funciones lineales de los errores parciales de cada observación. Los coeficientes de estas funciones dependen de la naturaleza del problema y del proceso seguido para obtener los resultados. El proceso más ventajoso es evidentemente aquel en el que el mismo error en los resultados es menos probable que en cualquier otro proceso. La aplicación del cálculo de probabilidades a la filosofía natural consiste, pues, en determinar analíticamente la probabilidad de los valores de estas funciones y en elegir sus coeficientes indeterminados de modo que la ley de esta probabilidad sea más rápidamente descendiente. Eliminando entonces de las fórmulas por los datos de la cuestión al factor introducido por la casi siempre desconocida ley de la probabilidad de errores parciales, podemos evaluar numéricamente la probabilidad de que los errores de los resultados no excedan una cantidad dada. Es así que tendremos casi todo lo deseable en lo tocante a los resultados deducidos de un gran número de observaciones.

Pueden obtenerse resultados muy aproximados desde otras consideraciones. Supongamos, por ejemplo, que tenemos mil una observaciones de la misma cantidad; la media aritmética de todas estas observaciones es el resultado dado por el método más ventajoso. Pero uno podría elegir el resultado de acuerdo con la condición de que la suma de las variaciones de cada valor parcial tomadas todas positivamente sea un *mínimo*. En efecto, parece natural considerar como muy aproximado el resultado que satisface esta condición. Es fácil ver que si uno dispone los valores dados por las observaciones de acuerdo con el orden de magnitud, el valor que ocupa la media satisfará la condición precedente, y el cálculo hace evidente que en el caso de un infinito número de observaciones coincidirá con la verdad; pero el resultado dado por el método más ventajoso sigue siendo preferible.

Por lo anterior vemos que la teoría de probabilidades no deja nada arbitrario en el modo de distribuir los errores de las observaciones; para esta distribución ofrece las fórmulas más ventajosas que disminuyen tanto como sea posible los errores a ser temidos en los resultados.

La consideración de probabilidades puede servir para distinguir las pequeñas irregularidades de los movimientos celestiales envueltos en los errores de observaciones, y para volver a la causa de las anomalías observadas en estos movimientos.

Al comparar todas las observaciones, fue Ticho-Brahe quien reconoció la necesidad de aplicar a la luna una ecuación de tiempo distinta de la que había sido aplicada al sol y a los planetas. Fue similarmente la totalidad de un gran número de observaciones la que hizo que Mayer reconociera que el coeficiente de la desigualdad de la precesión debe disminuirse un poco para la luna. Pero ya que esta disminución, no obstante haber sido confirmada e incluso aumentada por Mason, no parecía resultar de la gravitación universal, fue desatendida por la mayoría de los astrónomos en sus cálculos. Habiendo sometido al cálculo de probabilidades un número considerable de observaciones lunares elegidas para este propósito, y que el Sr. Bouvard consintió examinar a petición mía, me pareció estar indicado con una probabilidad tan fuerte que creí que habría de investigarse su causa. Pronto vi que sólo sería la elipticidad del esferoide terrestre, desatendida hasta ese entonces en la teoría del movimiento lunar al ser capaz de producir solamente términos imperceptibles. Concluí que estos términos se hacían perceptibles por las sucesivas integraciones de ecuaciones diferenciales. Determiné entonces tales términos por [medio de] un análisis particular, y primero descubrí que la desigualdad del movimiento lunar en latitud es proporcional al seno de la longitud de la luna, cosa que ningún astrónomo había sospechado antes. Después reconocí, por medio de esta desigualdad, que existe otra en el movimiento lunar en longitud que produce la disminución observada por Mayer en la ecuación de la precesión aplicable a la luna. La cantidad de esta disminución y el coeficiente de la anterior desigualdad en latitud resultan muy apropiados para fijar el achatamiento de la Tierra. Habiendo comunicado mis investigaciones al Sr. Burg, quien en ese tiempo estaba ocupado perfeccionando las tablas de la luna por la comparación de todas las observaciones buenas, le pedí que determinara con particular cuidado estas dos cantidades. Por un acuerdo muy notable, los valores que ha encontrado dan a la Tierra el mismo achatamiento, $\frac{1}{305}$, que difiere poco de la media derivada de las mediciones de los grados del meridiano y el péndulo; pero [si están] aquellos considerados desde el punto de vista de la influencia de los errores de las observaciones y de las causas perturbadoras en estas mediciones, no me parecieron [estar] exactamente determinados por estas desigualdades lunares.

Fue, de nuevo, por la consideración de probabilidades que reconocí la causa de la ecuación secular de la luna. Las observaciones modernas de esta estrella comparadas con los eclipses antiguos habían indicado a los astrónomos una aceleración en el movimiento lunar, pero los geómetras, y en particular Lagrange, habiendo buscado vanamente en las perturbaciones que este movimiento experimentó los términos de los que depende esta aceleración, la rechazaron. Un examen atento de las observaciones antiguas y modernas y de los eclipses intermedios observados por los árabes me convenció que estaba indicada con una gran probabilidad. Retomé desde este punto la teoría lunar, y reconocí que la ecuación secular de la luna se debe a la acción del sol sobre este satélite combinada con la variación secular de la excentricidad del orbe terrestre; esto me llevó al descubrimiento de las ecuaciones seculares de los movimientos de los nodos y de los perigeos de la órbita lunar, cuyas ecuaciones ni siquiera habían sido sospechadas por los astrónomos. El muy notable acuerdo de esta teoría con todas las observaciones antiguas y modernas la ha llevado a un grado muy alto de evidencia.

El cálculo de probabilidades me ha conducido similarmente hacia la causa de las grandes irregularidades de Júpiter y Saturno. Comparando las observaciones modernas con las antiguas, Halley encontró una aceleración en el movimiento de Júpiter y un retardo en el de Saturno. Con el propósito de reconciliar las observaciones, redujo los movimientos a dos ecuaciones seculares de signos contrarios aumentando a medida que pasaron los cuadrados de los tiempos desde 1700. Euler y Lagrange sometieron al análisis las alteraciones que la atracción mutua de estos dos planetas debía producir en estos movimientos. Al hacer esto encontraron las ecuaciones seculares, pero sus resultados fueron tan distintos que al menos uno de los dos debería ser erróneo. Entonces determiné ocuparme de este importante problema de *mecánica celeste*, y reconocí la invariabilidad de los movimientos planetarios medios, que anuló las ecuaciones seculares introducidas por Halley en las tablas de Júpiter y Saturno. Así es que sólo quedaban, con el fin de explicar la gran irregularidad de estos planetas, las atracciones de los cometas hacia los cuales muchos astrónomos tenían un recurso efectivo, o la existencia de una irregularidad durante un largo período producida en los movimientos de los dos planetas por su acción recíproca y afectada por signos contrarios para cada uno de ellos. Un teorema que encontré con respecto a las desigualdades de este tipo hizo muy probable esta desigualdad. De acuerdo con este teorema, si el movimiento de Júpiter acelera, el de Saturno retarda, cosa que ya se ha conformado con lo notado por Halley; además, la aceleración de Júpiter resultante del mismo teorema está al retardo de Saturno muy cercana en la proporción de las ecuaciones seculares propuestas por Halley. Considerando los movimientos medios de Júpiter y Saturno, pude fácilmente reconocer que dos veces el de Júpiter difería solamente por una cantidad muy pequeña de cinco veces el de Saturno. El período de una irregularidad que tendría para un argumento esta diferencia sería de alrededor de nueve siglos. En efecto, su coeficiente sería del orden de los cubos de las excentricidades de las órbitas, pero yo sabía que en virtud de integraciones sucesivas adquiría por divisor al cuadrado del muy pequeño multiplicador del tiempo en el argumento de esta desigualdad que es capaz de ofrecerle un gran valor; entonces la existencia de esta desigualdad me pareció muy probable. La siguiente observación aumentó después esta probabilidad. Suponiendo [que] su argumento [es] cero hacia la época de las observaciones de Ticho-Brahe, vi que Halley debería haber encontrado las alteraciones que indicó al comparar las observaciones modernas con las antiguas, mientras que la comparación de las observaciones modernas entre sí debería ofrecer alteraciones contrarias similares a las concluidas por Lambert en su comparación. No dudé entonces en desarrollar este largo y tedioso cálculo necesario para asegurarme de esta desigualdad. Fue completamente confirmada por el resultado de este cálculo, que además me hizo reconocer un gran número de otras desigualdades de las cuales la totalidad ha inclinado las tablas de Júpiter y Saturno a la precisión de las mismas observaciones.

Fue, una vez más, por medio del cálculo de probabilidades que reconocí la notable ley de los movimientos medios de los tres primeros satélites de Júpiter, de acuerdo con la cual la longitud media del primero menos tres veces la del segundo más dos veces la del tercero es rigurosamente igual a la media circunferencia. La aproximación con la cual los movimientos medios de estas estrellas satisfacen esta ley desde su descubrimiento indica su existencia con una probabilidad extrema. Entonces busqué su causa en su acción mutua. El examen en busca de esta acción me convenció de que era suficiente con que al principio las proporciones de sus movimientos medios se hubieran aproximado a esta ley dentro de ciertos límites, porque su acción mutua la había establecido y mantenido rigurosamente. Así, estos tres cuerpos se equilibrarán entre sí eternamente en el espacio de acuerdo con la ley precedente, a menos que causas extrañas, como los cometas, cambien de pronto sus movimientos sobre Júpiter.

En consecuencia, se ve qué tan necesario es estar atento a las indicaciones de la naturaleza cuando son el resultado de un gran número de observaciones, aunque en otros aspectos puedan ser inexplicables por medios conocidos. La extrema dificultad de los problemas relativos al sistema del mundo ha obligado a los geómetras a recurrir a la aproximación, que siempre deja lugar al miedo de que las cantidades desatendidas puedan tener una influencia apreciable. Una vez advertidos de esta influencia por las observaciones, han recurrido a su análisis, y al rectificarlo siempre han encontrado la causa de las anomalías observadas; han determinado las leyes y a menudo han anticipado las observaciones al descubrir las desigualdades que aún no había indicado. Así, uno puede decir que la propia naturaleza ha coincidido en la perfección analítica de las teorías basadas sobre el principio de gravedad universal, y esto es en mi opinión una de las pruebas más fuertes de la verdad de este admirable principio.

En los casos recién considerados, la solución analítica de la cuestión ha cambiado la probabilidad de las causas en certeza. Pero la mayoría de las veces esta solución es imposible, y sólo queda aumentar más y más esta probabilidad. Entre las numerosas e incalculables modificaciones que la acción de estas causas recibe desde circunstancias extrañas, estas causas siempre conservan, con los efectos observados, las proporciones adecuadas como para hacerlas reconocibles y verificar su existencia. Al determinar estas proporciones y al compararlas con un gran número de observaciones si uno encuentra que constantemente lo satisfacen, la probabilidad de las causas puede aumentar al punto de igualar la de los hechos con respecto a aquellos sobre los que no haya duda. La investigación de estas proporciones de causas a sus efectos no es menos útil en la filosofía natural que la solución directa de problemas, ya sea para verificar la realidad de estas causas o para determinar las leyes desde sus efectos, ya que puede emplearse en un gran número de cuestiones cuya solución directa no es posible, remplazando a ésta del modo más ventajoso. Discutiré aquí la aplicación que de ella he hecho a uno de los fenómenos más interesantes de la naturaleza, el flujo y el reflujo del mar.

Pline ha dado a este fenómeno una descripción notable por su exactitud, y en ella uno ve que los antiguos habían observado que las mareas de cada mes son mayores hacia las sizigias y menores hacia las cuadraturas; que son mayores en los perigeos que en los apogeos de la luna, y mayores en los equinoccios que en los solsticios. De esto concluyeron que este fenómeno se debe a la acción del sol y la luna sobre el mar. En el prefacio de su trabajo *De Stella Martis*, Kepler admite una tendencia de las aguas del mar hacia la luna, pero, ignorando la ley de esta tendencia, sólo pudo dar a este tema una idea probable. Newton convirtió en certeza la probabilidad de esta idea al unirla a su gran principio de gravedad universal. Ofreció la expresión exacta de las fuerzas de atracción que producían el flujo y el reflujo del mar, y con el fin de determinar los efectos supuso que el mar toma en cada instante la posición de equilibrio que concuerda con estas fuerzas. De esta manera explicó los principales fenómenos de las mareas, pero de esta teoría se seguía que en nuestros puertos las dos mareas del mismo día serían muy desiguales si el sol y la luna tuviesen una gran declinación. En Brest, por ejemplo, la marea de la tarde sería en las sizigias de los solsticios alrededor de ocho veces mayor que la marea de la mañana, lo que es ciertamente contrario a las observaciones que prueban que estas dos mareas son casi iguales. Este resultado de la teoría newtoniana podría valer para la suposición de que el mar es conforme en cada instante con una posición de equilibrio, una suposición que no es admisible en absoluto. Pero la investigación de la verdadera figura del mar presenta grandes dificultades. Auxiliado por los descubrimientos recién hechos por los geómetras en la teoría del movimiento de fluidos y en el cálculo de diferencias parciales, llevé a cabo esta investigación y ofrecí las ecuaciones diferenciales del movimiento del mar suponiendo que cubre toda la Tierra. Al trazar así de cerca a la naturaleza, tuve la satisfacción de ver que mis resultados se aproximaron a las observaciones, especialmente con respecto a la pequeña diferencia que existe en nuestros puertos entre las dos mareas de las sizigias del solsticio del mismo día. Encontré que serían iguales si el mar tuviese la misma profundidad en todas partes, y también que, al dar a esta profundidad valores convenientes, uno podía aumentar la altura de las mareas en un puerto de modo concordante con las observaciones. Pero estas investigaciones, a pesar de su generalidad, no satisficieron en absoluto las grandes diferencias que en este aspecto se presentan incluso entre puertos adyacentes, y que prueban la influencia de circunstancias locales. La imposibilidad de conocer estas circunstancias, así como la irregularidad de las cuencas marítimas y la de integrar las ecuaciones de diferencias parciales que son relativas, me ha obligado a componer la deficiencia por el método que he señalado antes. Entonces me esforcé en determinar las mayores proporciones posibles entre las fuerzas que afectan todas las moléculas del mar, así como sus efectos observables en nuestros puertos. Para esto recurrí al siguiente principio, que puede aplicarse a muchos otros fenómenos.

"El estado del sistema de un cuerpo en el que han desaparecido las condiciones primitivas del movimiento por las resistencias con las que éste se encuentra es periódico como las fuerzas que lo animan."

Combinando este principio con el de la coexistencia de oscilaciones muy pequeñas, he encontrado una expresión de la altura de las mareas cuyas arbitrariedades contienen el efecto de circunstancias locales de cada puerto y están reducidas al menor número posible; sólo es necesario compararla con un gran número de observaciones.

Por invitación de la Academia de Ciencias, se hicieron observaciones a comienzos del último siglo en las mareas de Brest, que continuaron durante seis años consecutivos. La situación de este puerto es muy favorable para este tipo de observaciones, ya que se comunica con el mar por un canal que se vacía en una vasta rada en el otro extremo de donde ha sido construido el puerto. Las irregularidades del mar se extienden de este modo sólo a un pequeño grado en el puerto, justo como las oscilaciones que produce el movimiento irregular de un recipiente en un barómetro disminuyen por un estrangulamiento hecho en el tubo de este instrumento. Además, siendo considerables las mareas en Brest, las variaciones accidentales causadas por los vientos son muy débiles; también notamos en las observaciones de estas mareas, sin importar qué tan poco las multipliquemos, una gran regularidad que me indujo a proponer al gobierno que en este puerto ordene una nueva serie de observaciones de las mareas, continuando durante un periodo del movimiento de los nodos de la órbita lunar. Esto se ha hecho. Las observaciones comenzaron el 1 de junio de 1806, y desde entonces se han hecho cada año ininterrumpidamente. Debo al infatigable entusiasmo del Sr. Bouvard, para todos los intereses astronómicos, los inmensos cálculos que ha demandado la comparación de mi análisis con las observaciones. Se han ocupado alrededor de seis mil observaciones, hechas durante el año de 1807 y en los quince que siguieron. De esta comparación resulta que mis fórmulas representan, con una precisión notable, todas las variedades de las mareas relativas a la digresión de la luna, desde el sol, a la declinación de estas estrellas, a sus distancias desde la Tierra, y a las leyes de variación en el *máximo* y *mínimo* de cada uno de estos elementos. De este acuerdo resulta una probabilidad de que el flujo y el reflujo del mar se deban a la atracción del sol y la luna aproximándose tanto a la certeza que no deba caber lugar para duda razonable alguna. Cambia a certeza cuando consideramos que esta atracción deriva de la ley de gravedad universal demostrada por todos los fenómenos celestes.

La acción de la luna sobre el mar es más del doble que la del sol. Newton y sus sucesores, al momento de desarrollar esta acción, han puesto atención únicamente en los términos divididos por el cubo de la distancia desde la luna a la Tierra, juzgando que los efectos debidos a los siguientes términos deberían ser inapreciables. Pero el cálculo de probabilidades nos hace claro que los efectos más pequeños de causas regulares pueden manifestarse en los resultados de un gran número de observaciones dispuestas en el orden más apropiado para indicarlas. Este cálculo determina, una vez más, tanto su probabilidad como hasta qué punto es necesario multiplicar las observaciones como para hacerlas muy vastas. Aplicándolo a las numerosas observaciones discutidas por el Sr. Bouvard, reconocí que en Brest la acción de la luna sobre el mar es mayor en las lunas llenas que en las lunas nuevas, y mayor cuando la luna es austral que cuando es boreal – fenómenos que pueden resultar solamente a partir de los términos de la acción lunar dividida por la cuarta potencia de la distancia desde la luna a la Tierra.

Para llegar al océano, la acción del sol y la luna atraviesa la atmósfera, que consecuentemente debe sentir su influencia y estar sujeta a movimientos similares a los del mar.

Estos movimientos producen oscilaciones periódicas en el barómetro. El análisis ha dejado claro para mí que son inapreciables en nuestros ambientes. Pero como las circunstancias locales aumentan considerablemente las mareas en nuestros puertos, he indagado si circunstancias similares han hecho apreciables estas oscilaciones del barómetro. Para esto he hecho uso de las observaciones meteorológicas que se han hecho cada día por muchos años en el observatorio real. Las alturas del barómetro y del termómetro se observan ahí a las nueve de la mañana, a las tres de la tarde, y a las once de la noche. El Sr. Bouvard ha querido disponer en los registros el estudio de las observaciones de los ocho años transcurridos desde el 1 de octubre de 1815 hasta el 1 de octubre de 1823. Al disponer las observaciones del modo más apropiado para indicar el flujo atmosférico lunar en París, encuentro sólo una dieciochava parte de un milímetro para la extensión de la correspondiente oscilación del barómetro. Es especialmente esto lo que nos ha hecho sentir la necesidad de un método para determinar la probabilidad de un resultado, y sin este método uno se ve forzado a presentar, como leyes de la naturaleza, los resultados de causas irregulares que han sucedido a menudo en la meteorología. Este método, aplicado al resultado anterior, muestra su incertidumbre a pesar del gran número de observaciones empleadas, y sería necesario aumentarlas por diez veces para obtener un resultado suficientemente probable.

El principio que sirve como base para mi teoría de las mareas puede extenderse a todos los efectos del azar a los cuales se unen causas variables de acuerdo con leyes regulares. La acción de estas causas produce en los resultados medios de un gran número de efectos variedades que siguen las mismas leyes y que uno puede reconocer por el análisis de probabilidades. En la medida en que son multiplicados estos efectos, tales variedades se manifiestan con una probabilidad cada vez mayor, que se aproximaría a la certeza si el número de los efectos de los resultados se hiciese infinito. Este teorema es análogo al que ya he desarrollado sobre la acción de causas constantes. Entonces, siempre que una causa cuyo progreso es regular pueda tener influencia sobre un tipo de eventos, podemos intentar descubrir su influencia al multiplicar las observaciones y al disponerlas en el orden más adecuado para indicarla. Cuando esta influencia parece manifestarse por sí misma, el análisis de probabilidades determina la probabilidad de su existencia y de su intensidad; así, la variación de la temperatura del día a la noche modificando la presión de la atmósfera y consecuentemente la altura del barómetro, es natural pensar que las observaciones multiplicadas de estas alturas deben mostrar la influencia del calor solar. De hecho, en el ecuador se ha reconocido desde hace mucho tiempo, donde esta influencia parece ser la mayor, una pequeña variación diurna en la altura del barómetro de la cual el *máximo* ocurre alrededor de las nueve de la mañana y el *mínimo* alrededor de las tres de la tarde. Un segundo *máximo* ocurre alrededor de las once de la noche y un segundo *mínimo* alrededor de las cuatro de la mañana. Las oscilaciones de la noche son menores que las del día, cuya extensión es de alrededor de dos milímetros. La inconstancia de nuestro clima no ha tomado esta variación de nuestros observadores, aunque puede ser menos apreciable que en los trópicos. El Sr. Ramond la ha reconocido y determinado en Clermont, el principal lugar del distrito de Puy-de-Dôme, por una serie de observaciones precisas hechas durante varios años; incluso ha encontrado que es menor en los meses de invierno que en otros meses. Las numerosas observaciones que he discutido con el fin de estimar la influencia de las atracciones del sol y la luna sobre las alturas barométricas en París me han servido para determinar su variación diurna. Comparando las alturas de las nueve de la mañana con aquellas de los mismos días a las tres de la tarde, esta variación se manifiesta con tanta evidencia que su valor medio ha sido constantemente positivo cada mes para cada uno de los setenta y dos meses desde el 1 de enero de 1817 hasta el 1 de enero de 1823; su valor medio en estos setenta y dos meses ha sido casi de 0.8 de un milímetro, un poco menor que en Clermont y mucho menor que en el ecuador. He reconocido que el resultado medio de las variaciones diurnas del barómetro de 9 de la mañana a 3 de la tarde ha sido sólo de 0.5428 de un milímetro en los tres meses de noviembre, diciembre, y enero, y que se ha elevado a 1.0563 milímetros en los tres meses siguientes, lo que coincide con las observaciones del Sr. Ramond. Los otros meses no ofrecen nada similar.

Con el fin de aplicar a estos fenómenos el cálculo de estas probabilidades, comencé por determinar la ley de la probabilidad de las anomalías de la variación diurna debida al azar. Aplicándola a las observaciones de este fenómeno, encontré que era una apuesta de más de 300,000 contra uno que fuese producido por una causa regular. No intenté determinar esta causa; me contenté con establecer su existencia. El periodo de la variación diurna regulado por el día solar indica evidentemente que esta variación se debe a la acción del sol. La extrema pequeñez de la acción atractiva del sol sobre la atmósfera se prueba por la pequeñez de los efectos debidos a las atracciones unidas del sol y la luna. Es entonces por la acción de su calor que el sol produce la variación diurna del barómetro, pero es imposible someter al cálculo los efectos de su acción sobre la altura del barómetro y sobre los vientos. La variación diurna de la aguja magnética es ciertamente un resultado de la acción del sol. Pero, ¿actúa esta estrella aquí como en la variación diurna del barómetro por su calor o por su influencia sobre la electricidad y sobre el magnetismo, o finalmente por la unión de estas influencias? Una gran serie de observaciones hechas en distintos países nos permitiría percibir esto.

Uno de los fenómenos más notables del sistema del mundo es el de todos los movimientos de rotación y de revolución de los planetas y los satélites en el sentido de la rotación del sol y aproximadamente en el mismo plano de su ecuador. Un fenómeno tan notable no es efecto del azar: indica una causa general que ha determinado todos sus movimientos. Con el fin de obtener la probabilidad con la que está indicada esta causa, observaremos que el sistema planetario, tal como lo conocemos hoy en día, está compuesto de once planetas y de al menos dieciocho satélites, si atribuimos, con Herschel, seis satélites a Urano. Los movimientos de la rotación del sol, de seis planetas, de la luna, de los satélites de Júpiter, del anillo de Saturno, y de uno de sus satélites, ya han sido reconocidos. Estos movimientos forman, junto con los de revolución, una totalidad de cuarenta y tres movimientos dirigidos en el mismo sentido; pero uno encuentra, por el análisis de probabilidades, que es una apuesta de más de 4000000000000 contra uno que esta disposición no sea resultado del azar; esto forma, en efecto, una probabilidad superior a la de eventos históricos ante los cuales no existe duda alguna. Entonces debemos creer al menos con igual confianza que una causa primitiva ha dirigido los movimientos planetarios, especialmente si consideramos que la inclinación del mayor número de estos movimientos en el ecuador solar es muy pequeña.

Otro fenómeno igualmente notable del sistema solar es el pequeño grado de la excentricidad de las órbitas de los planetas y los satélites. Mientras que aquellas de los cometas son muy alargadas, las órbitas del sistema no ofrecen ningunas sombras intermedias entre una excentricidad grande y una pequeña. Nos vemos forzados, una vez más, a reconocer el efecto de una causa regular; ciertamente, el azar no ha dado una forma casi circular a las órbitas de todos los planetas y sus satélites, y es entonces que la causa que ha determinado los movimientos de estos cuerpos los ha hecho casi circulares. Es necesario, de nuevo, que las grandes excentricidades de las órbitas de los cometas resulten de la existencia de esta causa sin que ella haya influido en la dirección de sus movimientos, pues se encuentra que hay casi tantos cometas retrógradas como directos, y que la inclinación media de todas sus órbitas a la elíptica se aproxima muy cerca de la mitad de un ángulo recto, como debería de ser si los cuerpos hubiesen sido arrojados al azar.

Sea cual sea la naturaleza de la causa en cuestión, ya que ha producido o dirigido el movimiento de los planetas, es necesario que haya abarcado todos los cuerpos y considerado todas las distancias que los separan; puede haber sido sólo un fluido de una extensión inmensa. Consiguientemente, para haberles dado en el mismo sentido un movimiento casi circular alrededor del sol, es necesario que este fluido haya rodeado a esta estrella como una atmósfera. La consideración de los movimientos planetarios nos conduce entonces a pensar que, en virtud de un calor excesivo, la atmósfera del sol originalmente se extendió más allá de las órbitas de todos los planetas, y que gradualmente se ha contraído a sus límites actuales.

En el estado primitivo donde imaginamos el sol, éste se asemejaba a las nebulosas que el telescopio nos muestra compuestas de un núcleo más o menos brillante rodeado por una nebulosa que, condensándose en la superficie, debe transformarlo algún día en una estrella. Si por analogía uno concibe todas las estrellas formadas de esta manera, puede imaginar su propio estado de nebulosidad anterior precedido por otras estrellas en las que la materia nebulosa era más y más difusa, el núcleo siendo menos y menos luminoso y denso. Volviendo tanto como sea posible, entonces uno llegaría a una nebulosidad tan difusa que apenas podría sospechar de su existencia.

Tal es, en efecto, el primer estado de las nebulosas que Herschel observó con especial cuidado por medio de sus potentes telescopios, y en el que ha seguido el proceso de condensación no sólo de una de ellas; estas etapas no nos son apreciables excepto después de siglos, pero en su totalidad, justo como en un inmenso bosque uno puede seguir el aumento de los árboles por los individuos de las diversas edades que contiene el bosque. Desde el comienzo ha observado materia nebulosa esparcida en diversas masas en las distintas partes de los cielos, de los cuales ocupa una gran extensión. En algunas de estas masas ha visto esta materia ligeramente condensada alrededor de una o varias nebulosas débilmente luminosas. En las otras nebulosas estos núcleos brillan, por otra parte, en proporción a la nebulosidad que los rodea. Al separarse las atmósferas de cada núcleo por una condensación ulterior, resultan las nebulosas múltiples formadas de núcleos brillantes muy adyacentes y rodeadas cada una por una atmósfera; a veces la materia nebulosa, al condensarse de modo uniforme, ha producido las nebulosas llamadas *planetarias*. Finalmente, un grado mayor de condensación transforma todas estas nebulosas en estrellas. Las nebulosas clasificadas de acuerdo con esta perspectiva filosófica indican con una probabilidad extrema su futura transformación en estrellas y el anterior estado de nebulosidad de estrellas existentes. Las consideraciones que siguen vienen en ayuda de pruebas trazadas desde estas analogías.

Por mucho tiempo, la particular disposición de ciertas estrellas visibles a simple vista ha llamado la atención de observadores filosóficos. Mitchel ya ha señalado qué tan improbable es que las estrellas de las Pléyades, por ejemplo, hayan estado confinadas en el estrecho espacio que las contiene solamente por las posibilidades del azar, y de ello ha concluido que este grupo de estrellas y los grupos similares que nos presenta el cielo son el resultado de una causa primitiva o de una ley general de la naturaleza. Estos grupos son un resultado necesario de la condensación de las nebulosas en varios núcleos; es evidente que, estando la materia nebulosa continuamente atraída por los diversos núcleos, con el tiempo deben formar un grupo de estrellas igual al de las Pléyades. La condensación de las nebulosas en dos núcleos forma similarmente estrellas muy adyacentes, girando una alrededor de la otra, iguales a aquellas cuyos respectivos movimientos ya ha considerado Herschel. Tales son, además, la sexagésimo primera de la [constelación] Cygnus y su siguiente en la que Bessel recién ha reconocido movimientos particulares tan considerables y tan poco distintos que la proximidad de estas estrellas entre sí y su movimiento alrededor del centro común de gravedad no deben dejar duda alguna. Así, uno desciende por grados desde la condensación de materia nebulosa a la consideración del sol rodeado primeramente por una vasta atmósfera, una consideración a la que uno vuelve, como ya se ha visto, por la examinación de los fenómenos del sistema solar. Un caso tan notable da a la existencia de este estado anterior del sol una probabilidad acercándose con fuerza a la certeza.

Pero, ¿cómo ha determinado la atmósfera solar los movimientos de rotación y revolución de los planetas y los satélites? Si estos cuerpos han penetrado profundamente la atmósfera, su resistencia habría causado que cayeran sobre el sol; entonces uno es llevado a creer con mucha probabilidad que los planetas han sido formados en los sucesivos límites de la atmósfera solar que, contrayéndose por el frío, debió haber abandonado en el plano de su ecuador zonas de vapores que la mutua atracción de sus moléculas ha transformado en diversos esferoides. Los satélites han sido similarmente formados por las atmósferas de sus respectivos planetas.

En mi *Exposición del Sistema del Mundo* he desarrollado ampliamente esta hipótesis, que me parece satisface todos los fenómenos que nos presenta este sistema. Aquí me contentaré con considerar que la velocidad angular de rotación del sol y los planetas, siendo acelerada por la condensación sucesiva de sus atmósferas en sus superficies, debería superar la velocidad angular de revolución de los cuerpos más cercanos que giran alrededor de ellos. En realidad, la observación ha confirmado esto con respecto a los planetas y los satélites, e incluso en proporción al anillo de Saturno, cuya duración de revolución es de 0.438 minutos, mientras que la duración de rotación de Saturno es de 0.427 minutos.

En esta hipótesis, los cometas son extraños al sistema planetario. Atribuyendo su formación a la de las nebulosas, pueden considerarse como pequeñas nebulosas en los núcleos, errando de sistemas a sistemas solares, y formados por la condensación de la materia nebulosa esparcida con tanta profusión en el Universo. Los cometas serían así, en relación con nuestro sistema, como los aerolitos son relativamente con la Tierra, a la que parecerían extraños. Cuando estas estrellas se vuelven visibles para nosotros, ofrecen una semejanza tan perfecta con las nebulosas que a menudo son confundidas con ellas, y es sólo a partir de su movimiento, o a partir del conocimiento de todas las nebulosas confinadas en aquella parte de los cielos donde aparecen, que conseguimos distinguirlas. Esta suposición explica felizmente la gran extensión que adquieren las cabezas y las colas de los cometas a medida que se acercan al sol, y la rareza extrema de estas colas que, a pesar de su inmensa profundidad, en absoluto debilitan apreciablemente la luz de las estrellas que vemos al otro lado.

Cuando las nebulosas pequeñas entran en aquella parte del espacio donde la atracción del sol es predominante, y que llamaremos la *esfera de actividad* de esta estrella, las fuerza a describir órbitas elípticas o hiperbólicas. Pero al ser su velocidad igualmente posible en todas direcciones, deberían moverse indistintamente en todos los sentidos y bajo todas las inclinaciones de la elíptica, lo que concuerda con lo que se ha observado.

La gran excentricidad de las órbitas cometarias resulta también de la hipótesis anterior. En efecto, si estas órbitas son elípticas, son muy alargadas, ya que sus grandes ejes son al menos iguales al radio de la esfera de actividad del sol. Pero estas órbitas pueden ser hiperbólicas, y si los ejes de estas hipérbolas no son muy grandes en proporción con la distancia media del sol a la Tierra, el movimiento de los cometas que los describe parecerá sensiblemente hiperbólico. Sin embargo, de los cien cometas sobre los que ya tenemos sus elementos, ciertamente ninguno parece moverse en una hipérbola. Es necesario, pues, que las posibilidades que dan una hipérbola apreciable sean extremadamente raras en proporción con las posibilidades contrarias.

Los cometas son tan pequeños que, para hacerse visibles, su distancia perihélica debería ser insignificante. Hasta el presente, esta distancia ha superado sólo dos veces el diámetro de la órbita terrestre, y más a menudo ha estado por debajo del radio de esta órbita. Se concibe que, para acercarse tan cerca del sol, su velocidad en el momento de su entrada en su esfera de actividad debe tener una magnitud y una dirección confinadas dentro de límites estrechos. Al determinar, por el análisis de probabilidades, la proporción de las posibilidades que, en estos límites, dan una hipérbola apreciable con las posibilidades que dan una órbita que puede confundirse con una parábola, he encontrado que es una apuesta de al menos 6000 contra uno que una nebulosa que penetra en la actividad del sol de modo tal que sea observada describa una elipse muy alargada o una hipérbola. Por la magnitud de su eje, la última será apreciablemente confundida con una parábola en la parte que es observada; entonces no es sorprendente que, hasta este momento, no hayan sido reconocidos movimientos hiperbólicos.

La atracción de los planetas y, quizá también, la resistencia de los centros etéreos, debieron haber cambiado muchas órbitas cometarias en las elipses cuyo gran eje es menor que el radio de la esfera de actividad del sol, lo que aumenta las posibilidades de las órbitas elípticas. Podemos creer que este cambio ha tenido lugar con el cometa de 1759 y con el cometa cuya duración es de sólo mil doscientos años, que reaparecerá sin cesar en este corto intervalo a menos que la evaporación que encuentra en cada uno de sus regresos con el perihelio termine por hacerlo invisible.

También podemos verificar, con la ayuda del análisis de probabilidades, la existencia o la influencia de ciertas causas cuya acción se cree que existe sobre seres organizados. De todos los instrumentos que podemos emplear para reconocer los imperceptibles agentes de la naturaleza, los más sensibles son los nervios, especialmente cuando causas particulares incrementan su sensibilidad. Es con su ayuda que se ha descubierto la débil electricidad que desarrolla el contacto de dos metales heterogéneos, y esto ha abierto un vasto campo a las investigaciones de los físicos y los químicos. Los singulares fenómenos que resultan de la extrema sensibilidad de los nervios en algunos individuos han dado nacimiento a diversas opiniones sobre la existencia de un nuevo agente que ha sido llamado *magnetismo animal*, respecto a la acción sobre el magnetismo ordinario, respecto a la influencia del sol y la luna en algunas afecciones nerviosas, y finalmente respecto a las impresiones que hacen sentir la proximidad de metales o el agua corriendo. Es natural pensar que la acción de estas causas es muy débil, y que puede perturbarse fácilmente por circunstancias accidentales; así, no debería ser negada por el hecho de que en algunos casos no se manifieste en absoluto. Estamos tan lejos de reconocer todos los agentes de la naturaleza y sus diversos modos de acción que sería antifilosófico negar los fenómenos solamente porque son inexplicables en el estado actual de nuestro conocimiento. Pero debemos examinarlos con una atención tanto más escrupulosa cuanto parezca más difícil admitirlos, y es aquí que el cálculo de probabilidades se vuelve indispensable al determinar justo hasta qué punto es necesario multiplicar las observaciones o las experiencias para obtener a favor de los agentes que indican una probabilidad superior a las razones que pueden obtenerse en otra parte para no admitirlos.

El cálculo de probabilidades puede hacer apreciables las ventajas y los inconvenientes de los métodos empleados en las ciencias especulativas. Así, para reconocer el mejor de los tratamientos en uso en la curación de una enfermedad, es suficiente con probar cada uno de ellos en un igual número de pacientes, haciendo que todas las condiciones sean exactamente similares; la superioridad del tratamiento más ventajoso se manifestará más y más a medida que aumente el número, y el cálculo hará evidente la correspondiente probabilidad de su ventaja y la proporción de acuerdo con la cual es superior a los otros [tratamientos].

CAPÍTULO X

APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A LAS CIENCIAS MORALES

Acabamos de ver las ventajas del análisis de probabilidades en la investigación de las leyes de los fenómenos naturales cuyas causas son desconocidas o tan complicadas que sus resultados no pueden someterse al cálculo. Este es el caso de casi todos los asuntos de las ciencias morales. En las instituciones humanas influyen tantas causas imprevistas, ocultas o inapreciables, que es imposible juzgar *a priori* los resultados. La serie de eventos provocados por el tiempo desarrolla estos resultados e indica los medios para remediar aquellos que son perjudiciales. A este respecto se han hecho leyes sabias, pero como hemos descuidado la conservación de sus motivos, muchas han sido abrogadas por inútiles, y el hecho de que las experiencias vejatorias hayan renovado su necesidad debió de haberlas restablecido.

Es muy importante conservar en cada rama de la administración pública un registro exacto de los resultados que han producido los diversos medios utilizados, y que constituyen tantísimas experiencias hechas a gran escala por los gobiernos. Apliquemos a las ciencias políticas y morales el método encontrado en la observación y en el cálculo, el método que nos ha servido tan bien en las ciencias naturales. No ofrezcamos, en lo más mínimo, una resistencia inútil y a veces peligrosa a los inevitables efectos del progreso del conocimiento, sino que cambiemos, sólo con una prudencia extrema, nuestras instituciones y los usos a los que por tanto tiempo nos hemos conformado. Por la experiencia del pasado, bien deberíamos conocer las dificultades que presentan, pero ignoramos la extensión de los males que puede producir su cambio. Ante esta ignorancia, la teoría de la probabilidad nos conduce a evadir todo cambio, especialmente aquellos que tanto en el mundo moral como en el físico nunca operan sin una gran pérdida de fuerza vital.

El cálculo de probabilidades ya ha sido aplicado exitosamente a varios asuntos de las ciencias morales. Presentaré aquí los principales resultados.

CAPÍTULO XI

ACERCA DE LAS PROBABILIDADES DE LOS TESTIMONIOS

Estando la mayoría de nuestras opiniones fundada sobre la probabilidad de pruebas, resulta importante someter ésta al cálculo. Las cosas, es cierto, a veces se vuelven imposibles por la dificultad de apreciar la veracidad de los testigos y por el gran número de circunstancias que acompañan los hechos sobre los que dan fe; pero en varios casos uno es capaz de resolver los problemas que tengan mucha analogía con las cuestiones propuestas y cuyas soluciones pueden considerarse como aproximaciones adecuadas para guiarnos y defendernos en contra de los errores y los peligros del falso razonamiento al cual estamos expuestos. Una aproximación de este tipo, cuando se hace bien, siempre es preferible a los razonamientos más especiosos. Intentemos, entonces, ofrecer algunas reglas generales para obtenerla.

Se ha sacado un solo número de una urna que contiene mil de ellos. Un testigo de esta extracción anuncia que el número sacado es el 79, y nos preguntamos por la probabilidad de sacar este número. Supongamos que la experiencia nos ha hecho saber que este testigo engaña una de cada diez veces, de modo que la probabilidad de su testimonio es $\frac{9}{10}$. Aquí el evento observado es el testigo acreditando que se saca el número 79. Este evento puede resultar de las siguientes dos hipótesis: que el testigo pronuncie la verdad o que engañe. Siguiendo el principio ya expuesto sobre la probabilidad de causas trazada desde eventos observados, es necesario primero determinar *a priori* la probabilidad del evento en cada hipótesis. En la primera, la probabilidad de que el testigo anuncie el número 79 es la propia probabilidad de sacar este número, esto es, $\frac{1}{1000}$. Es necesario multiplicarlo por la probabilidad $\frac{9}{10}$ de la veracidad del testigo; entonces uno tendrá $\frac{9}{10000}$ como la probabilidad del evento observado en esta hipótesis. Si el testigo engaña, no se saca el número 79, y la probabilidad de este caso es $\frac{999}{1000}$. Pero para anunciar la extracción de este número el testigo tiene que elegirlo entre los 999 números no sacados, y como se supone que no tiene motivo de preferencia para unos en vez de otros, la probabilidad de que elija el número 79 es $\frac{1}{999}$; multiplicando, pues, esta probabilidad por la anterior, tendremos $\frac{1}{1000}$

como la probabilidad de que el testigo anuncie al número 79 en la segunda hipótesis. Es necesario, de nuevo, multiplicar esta probabilidad por $\frac{1}{10}$ de la propia hipótesis, lo que da $\frac{1}{10000}$ como la probabilidad del evento relativa a esta hipótesis. Ahora, si formamos una fracción cuyo numerador es la probabilidad relativa a la primera hipótesis y cuyo denominador es la suma de las probabilidades relativa a las dos hipótesis, por el sexto principio tendremos la probabilidad de la primera hipótesis, y esta probabilidad será $\frac{9}{10}$, es decir, la propia veracidad del testigo. Esta es igualmente la probabilidad de la extracción del número 79. La probabilidad de la falsedad del testigo y del fracaso en sacar este número es $\frac{1}{10}$.

Si el testigo, deseando engañar, tiene algún interés en elegir el número 79 de entre los números no sacados – si juzga, por ejemplo, que, habiendo puesto sobre este número una apuesta considerable, el anuncio de su extracción aumentará su crédito – la probabilidad de que elija este número ya no será como al principio, $\frac{1}{999}$, sino que será $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$, etc., dependiendo del interés que tenga en anunciar su extracción. Suponiendo que sea $\frac{1}{9}$, será necesario multiplicar por esta fracción la probabilidad $\frac{999}{1000}$ con el fin de obtener en la hipótesis de la falsedad la probabilidad del evento observado, la cual sigue siendo necesario multiplicar por $\frac{1}{10}$, lo que da $\frac{111}{10000}$ como la probabilidad del evento en la segunda hipótesis. Entonces la probabilidad de la primera hipótesis, o de la extracción del número 79, se reduce, por la regla precedente, a $\frac{9}{120}$. Entonces se ve muy disminuida por la consideración del interés que pueda tener el testigo en anunciar la extracción del número 79. En realidad, este mismo interés aumenta la probabilidad $\frac{9}{10}$ de que el testigo diga la verdad si se saca el número 79. Pero esta probabilidad no puede exceder la unidad o $\frac{10}{10}$; así, la probabilidad de la extracción del número 79 no superará $\frac{10}{121}$. El sentido común nos dice que este interés debe inspirar desconfianza, pero el cálculo aprecia su influencia.

La probabilidad *a priori* del número anunciado por el testigo es la unidad dividida entre el número de los números en la urna; cambia en virtud de la prueba en la propia veracidad del testigo, y entonces puede verse disminuida por la prueba. Si, por ejemplo, la urna contiene solamente dos números, lo que da $\frac{1}{2}$ como la probabilidad *a priori* de la extracción del número 1, y si la veracidad de un testigo que la anuncia es $\frac{4}{10}$, esta extracción se vuelve menos probable. En realidad es evidente, ya que el testigo tiene entonces más inclinación hacia una falsedad que hacia la verdad, que su testimonio ha de decrecer la probabilidad del hecho pronunciado cada vez que esta probabilidad iguale o supere a $\frac{1}{2}$. Pero si hay tres números en la urna, la probabilidad *a priori* de la extracción del número 1 aumenta por la afirmación de un testigo cuya veracidad supere a $\frac{1}{3}$.

Supóngase ahora que la urna contiene 999 bolas negras y una bola blanca, y que, habiendo sido sacada una bola, un testigo de la extracción anuncia que esta bola es blanca. La probabilidad del evento observado, determinada *a priori* en la primera hipótesis, será aquí como en la cuestión precedente, igual a $\frac{9}{10000}$. Pero en la hipótesis donde el testigo engaña, la bola blanca no es sacada y la probabilidad de este caso es $\frac{999}{1000}$. Es necesario multiplicarla por la probabilidad $\frac{1}{10}$ de la falsedad, lo que da $\frac{999}{10000}$ como la probabilidad del evento observado relativa a la segunda hipótesis. Esta probabilidad fue de sólo $\frac{1}{10000}$ en la cuestión anterior; esta gran diferencia resulta de esto: que, habiendo sido sacada una bola negra, el testigo que desea engañar no tiene ninguna elección que hacer de entre las 999 bolas no sacadas con el propósito de anunciar la extracción de una bola blanca. Ahora, si uno forma dos fracciones cuyos numeradores son las probabilidades relativas a cada hipótesis y cuyo denominador común es la suma de estas probabilidades, uno tendrá $\frac{9}{1008}$ como la probabilidad de la primera hipótesis y de la extracción de una bola blanca, y $\frac{999}{1008}$ como la probabilidad de la segunda hipótesis y de la extracción de una bola negra. Esta última probabilidad se acerca fuertemente a la certeza, y se acercaría mucho más y se volvería $\frac{999999}{1000008}$ si la urna contuviese un millón de bolas de las cuales una fuese blanca, volviéndose mucho más extraordinaria la extracción de una bola blanca. Vemos, así, cómo la probabilidad de la falsedad aumenta en la medida en que el hecho se vuelve más extraordinario.

Hasta ahora hemos supuesto que el testigo no se equivocó en absoluto, pero si uno admite la posibilidad de su error el evento extraordinario se vuelve más improbable. Entonces, en lugar de las dos hipótesis, uno tendrá las siguientes cuatro: la del testigo que no engaña y no se equivoca en absoluto; la del testigo que no engaña en absoluto y se equivoca; la del testigo que engaña y no se equivoca en absoluto, y finalmente la del testigo que engaña y se equivoca. Determinando *a priori* en cada una de estas hipótesis la probabilidad del evento observado, por el sexto principio encontramos que la probabilidad de que el hecho atestiguado sea falso es igual a una fracción cuyo numerador es el número de bolas negras en la urna multiplicado por la suma de las probabilidades de que el testigo no engañe en absoluto y esté equivocado, o que engañe y no esté equivocado, y cuyo denominador es este numerador aumentado por la suma de las probabilidades de que el testigo no engañe en absoluto y no esté equivocado en absoluto, o que engañe y esté equivocado al mismo tiempo. A partir de esto vemos que, si el número de bolas negras en la urna es muy grande, lo que hace que la extracción de la bola blanca sea extraordinaria, la probabilidad de que el hecho atestiguado no sea verdadero se aproxima casi hasta la certeza.

Aplicando esta conclusión a todos los hechos extraordinarios, resulta de ella que la probabilidad del error o de la falsedad del testigo se vuelve mucho mayor a medida que el hecho atestiguado sea más extraordinario. Algunos autores han expuesto lo contrario sobre la base de que, siendo la visión de un hecho extraordinario perfectamente similar a la de un hecho ordinario, los mismos motivos deberían llevarnos a dar al testigo el mismo crédito cuando afirma uno u otro de estos hechos. El sentido común rechaza tan extraña afirmación, pero el cálculo de probabilidades, al tiempo que confirma las conclusiones del sentido común, aprecia la mayor improbabilidad de los testimonios con respecto a hechos extraordinarios.

Estos autores insisten y suponen dos testigos igualmente dignos de confianza, de los cuales el primero da fe de haber visto a un individuo muerto hace quince días a quien el segundo testigo afirma haber visto ayer lleno de vida. Uno u otro de estos hechos no ofrece improbabilidad. La reserva del individuo es un resultado de su combinación; pero los testimonios no nos llevan en absoluto directamente a este resultado, aunque el crédito debido a estos testimonios no debería decrecer por el hecho de que el resultado de su combinación sea extraordinario.

Pero si la conclusión que resulta de la combinación de los testimonios fuese imposible, uno de ellos sería necesariamente falso; pero una conclusión imposible es el límite de conclusiones extraordinarias, así como el error es el límite de conclusiones improbables. El valor de los testimonios que se vuelve cero en el caso de una conclusión imposible debería entonces decrecer mucho en el [caso] de una conclusión extraordinaria. Esto se confirma, en efecto, por el cálculo de probabilidades.

Para hacer esto evidente consideremos dos urnas, A y B, de las cuales la primera contiene un millón de bolas blancas y la segunda un millón de bolas negras. Uno saca de una de estas urnas una bola que pone de vuelta en la otra urna de la cual uno saca después una bola. Dos testigos, uno de la primera extracción y otro de la segunda, atestiguan que la bola que han visto extraída es blanca sin indicar la urna de la que ha sido sacada. Cada testimonio, tomado por sí solo, no es improbable, y es fácil ver que la probabilidad del hecho atestiguado es la propia veracidad del testigo. Pero de la combinación de los testimonios se sigue que en la primera extracción ha sido sacada una bola blanca de la urna A y que después de puesta en la urna B reapareció en la segunda extracción, lo que es muy extraordinario, pues para esta segunda urna, conteniendo entonces una bola blanca entre un millón de bolas negras, la probabilidad de sacar la bola blanca es $\frac{1}{1000001}$.[1] Con el fin de determinar la disminución que resulta en la probabilidad de la cosa anunciada por los dos testigos, debemos notar que aquí el hecho observado es la afirmación de cada uno de ellos de que la bola que ha visto extraída es blanca. Representemos por $\frac{9}{10}$ la probabilidad de que anuncia la verdad, que puede ocurrir en el caso presente cuando el testigo no engaña y no se equivoca en absoluto, y cuando engaña y se equivoca al mismo tiempo. Uno puede formar las siguientes cuatro hipótesis:

Primera. El primero y el segundo testigo dicen la verdad. Entonces una bola blanca ha sido primeramente sacada de la urna A, y la probabilidad de este evento es $\frac{1}{2}$, ya que la

[1] Es claro que, al igual que con otros ejemplos anteriores de este tipo, la urna B debió haber sido agitada una vez introducida la bola blanca para que resulte la probabilidad calculada por Laplace. Nota del Traductor.

bola sacada en la primera extracción podría haber sido sacada de una u otra urna. Consecuentemente la bola sacada, puesta en la urna B, ha reaparecido en la segunda extracción; la probabilidad de este evento es $\frac{1}{1000001}$, y entonces la probabilidad del hecho anunciado es $\frac{1}{2000002}$. Multiplicándola por el producto de las probabilidades $\frac{9}{10}$ y $\frac{9}{10}$ de que los testigos digan la verdad uno tendrá $\frac{81}{200000200}$ como la probabilidad del evento observado en esta primera hipótesis.

Segunda. El primer testigo dice la verdad y el segundo no, ya sea porque engaña y no está equivocado o porque no engaña y está equivocado. Entonces una bola blanca ha sido sacada de la urna A en la primera extracción, y la probabilidad de este evento es $\frac{1}{2}$. Después, una vez puesta esta bola en la urna B, ha sido sacada una bola negra de ella; la probabilidad de tal extracción es $\frac{1000000}{1000001}$, y entonces uno tiene $\frac{1000000}{2000002}$ como la probabilidad del evento compuesto. Multiplicándola por el producto de las dos probabilidades $\frac{9}{10}$ y $\frac{1}{10}$ de que el primer testigo diga la verdad y el segundo no, uno tendrá $\frac{9000000}{200000200}$ como la probabilidad para el evento observado en la segunda hipótesis.

Tercera. El primer testigo no dice la verdad y el segundo sí. Entonces una bola negra ha sido sacada de la urna B en la primera extracción, y después de haber sido puesta en la urna A ha sido sacada una bola blanca de ella. La probabilidad del primero de estos eventos es $\frac{1}{2}$ y la del segundo es $\frac{1000000}{1000001}$; entonces la probabilidad del evento compuesto es $\frac{1000000}{2000002}$. Multiplicándola por el producto de las probabilidades $\frac{1}{10}$ y $\frac{9}{10}$ de que el primer testigo no diga la verdad y el segundo sí, uno tendrá $\frac{9000000}{200000200}$ como la probabilidad del evento observado relativo a esta hipótesis.

Cuarta. Finalmente, ninguno de los testigos dice la verdad. Entonces una bola negra ha sido sacada de la urna B en la primera extracción, y después, una vez puesta en la urna A, ha reaparecido en la segunda extracción; la probabilidad de este evento compuesto es $\frac{1}{2000002}$. Multiplicándola por el producto de las probabilidades $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{10}$ de que ningún testigo diga la verdad, uno tendrá $\frac{1}{200000200}$ como la probabilidad del evento observado en esta hipótesis.

Ahora, con el fin de obtener la probabilidad de la cosa anunciada por los dos testigos, a saber, que una bola blanca ha sido sacada en cada extracción, es necesario dividir la probabilidad correspondiente a la primera hipótesis entre la suma de las probabilidades relativas a las cuatro hipótesis; y entonces uno tiene $\frac{81}{18000082}$ para esta probabilidad, una fracción extremadamente pequeña.

Si los dos testigos afirman lo primero, que ha sido sacada una bola blanca de una de las dos urnas A y B, y lo segundo, que igualmente ha sido sacada una bola blanca de una de las dos urnas A' y B', bastante similares a las primeras, la probabilidad de la cosa anunciada por los dos testigos será el producto de las probabilidades de sus testimonios, o $\frac{81}{100}$; entonces será al menos ciento ochenta mil veces mayor que la anterior. Por esto uno ve qué tanto, en el primer caso, la reaparición en la segunda extracción de la bola blanca sacada en la primera extracción, la extraordinaria conclusión de los dos testimonios hace decrecer su valor.

No daríamos crédito al testimonio de un hombre que nos juramentara que al haber arrojado un centenar de dados al aire todos cayeron sobre la misma cara. Si hubiésemos sido espectadores de este evento, creeríamos a nuestros ojos solamente después de haber examinado cuidadosamente todas las circunstancias, y después de haber traído los testimonios de otros ojos con el fin de estar muy seguros de que no han tenido lugar alucinaciones ni engaños. Pero después de esta examinación no dudaríamos en admitirlo, a pesar de su extrema improbabilidad, y nadie estaría tentado, con el propósito de explicarlo, a recurrir a una negación de las leyes de la visión. De él debemos concluir que la probabilidad de la constancia de las leyes de la naturaleza nos es mayor que esto, que el evento en cuestión no ha tenido lugar en absoluto – una probabilidad mayor que la de la mayoría de hechos históricos que consideramos incontestables. Por esto uno puede juzgar el inmenso peso de los testimonios necesarios para admitir una suspensión de las leyes naturales, y qué tan impropio sería aplicar a este caso las reglas ordinarias de la crítica. Todos aquellos que, sin ofrecer esta inmensidad de testimonios, apoyan esto al hacer recitales de eventos contrarios a tales leyes, decrecen en lugar de aumentar la creencia que desean inspirar, porque entonces aquellos recitales hacen muy probable el error o la falsedad de sus autores. Pero aquello que disminuye la creencia de los hombres educados tiende a aumentar la de los hombres sin educación, siempre ávidos de lo maravilloso.

Hay cosas tan extraordinarias que nada puede equilibrar su improbabilidad. Pero esto, por el efecto de una opinión dominante, puede debilitarse hasta el punto de parecer inferior a la probabilidad de los testimonios; y cuando esta opinión transforma una declaración absurda admitida unánimemente en el siglo que le ha dado nacimiento ofrece a los siglos siguientes solamente una nueva prueba de la influencia extrema de la opinión general sobre las mentes más iluminadas. Dos grandes hombres del siglo de Luis XIV – Racine y Pascal – son ejemplos notables de esto. Resulta doloroso ver con qué complacencia Racine, este pintor admirable del corazón humano y el poeta más perfecto que haya vivido jamás, reporta como milagrosa la recuperación de la señorita Perrier, sobrina de Pascal y algún día pupila en el monasterio de Port-Royal; resulta doloroso leer las razones por las que Pascal busca probar que este milagro debería ser necesario para la religión con el fin de justificar la doctrina de los monjes de esta abadía, perseguida en ese tiempo por los jesuitas. La joven Perrier había estado afligida, durante tres años y medio, por una fístula lagrimal; tocó su afligido ojo con una reliquia que se pretendía era una de las espinas de la corona del salvador y tuvo fe en una recuperación instantánea. Algunos días después, los médicos y los cirujanos atestiguaron la recuperación, y declararon que ni la naturaleza ni los remedios habían tenido parte en ella. Este evento, que tuvo lugar en 1656, causó una gran sensación, y "todo París se apresuró", dice Racine, "a Port-Royal. La multitud aumentaba día a día, y el propio Dios parecía complacerse en autorizar la devoción de la gente por el número de milagros que se realizaban en su iglesia". En ese entonces ni los milagros ni la hechicería parecían improbables, y nadie dudó en atribuirles las singularidades de la naturaleza que no podían explicarse de otro modo.

Esta manera de considerar los resultados extraordinarios se encuentra en los trabajos más notables del siglo de Luis XIV; incluso en el *Ensayo sobre el entendimiento humano* del filósofo Locke, quien dice, al hablar del grado de asentimiento, que "Aunque la experiencia común y el curso ordinario de las cosas justamente tienen una influencia poderosa sobre las mentes de los hombres para hacerlos que den crédito o rechacen cualquier cosa propuesta a su creencia, hay no obstante un caso donde la extrañeza del hecho no disminuye el asentimiento a un justo testimonio de él. Pues donde tales eventos supernaturales son propicios para fines dirigidos por aquel que tiene el poder de cambiar el curso de la naturaleza, ahí, bajo tales circunstancias, pueden ser los más ajustados para procurar la creencia, por tanto más se escapen o sean contrarios a la observación ordinaria." Los verdaderos principios de la probabilidad de los testimonios habiendo estado así incomprendidos por los filósofos para quienes la razón está endeudada en aras de su progreso, he creído necesario presentar a detalle los resultados del cálculo sobre este importante tema.

En este punto surge naturalmente la discusión de un célebre argumento de Pascal que Craig, un matemático inglés, ha producido bajo una forma geométrica. Testigos declaran haber recibido de la divinidad que, al conformarse con una cierta cosa, uno disfrutará no una ni dos sino un infinito de vidas felices. No obstante qué tan débil pueda ser la probabilidad de las pruebas, siempre que no sea infinitamente pequeña, es claro que la ventaja de aquellos que se conforman con la cosa prescrita es infinita, ya que es el producto de esta probabilidad y de un bien infinito; uno no debería dudar, entonces, en procurarse esta ventaja.

Este argumento está basado en el número infinito de vidas felices prometidas en el nombre de la divinidad por los testigos; es necesario entonces prescribirlos, precisamente porque exageran sus promesas más allá de todo límite, una consecuencia repugnante al buen sentido. También el cálculo nos enseña que esta exageración debilita la probabilidad de su testimonio al punto de hacerla infinitamente pequeña o cero. En realidad, este caso es similar al de un testigo que anuncia la extracción del número mayor de una urna llenada con un gran número de números uno de los cuales ha sido sacado, y quien tendría un gran interés en anunciar la extracción de este número. Ya hemos visto qué tanto debilita a su testimonio este interés. Al evaluar solamente en $\frac{1}{2}$ la probabilidad de que si el testigo engaña elegirá al número más grande, el cálculo da la probabilidad de su anuncio tan pequeña como una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la unidad más la mitad del producto del número de los números por la probabilidad de falsedad considerada *a priori* o independientemente del anuncio. Con el fin de comparar este caso con el argumento de Pascal, basta con representar, por los números en la urna, todos los posibles números de vidas felices que el número de estos números hace infinito, y con observar que, si los testigos engañan, tienen el mayor interés, con el fin de acreditar su falsedad, en prometer una eternidad de felicidad. La expresión de la probabilidad de su testimonio se vuelve, entonces, infinitamente pequeña. Multiplicándola por el número infinito de vidas felices prometidas, el infinito desaparecería del producto que expresa la ventaja resultante de esta promesa, lo que destruye el argumento de Pascal.

Consideremos ahora la probabilidad de la totalidad de varios testimonios sobre un hecho establecido. Con el propósito de fijar nuestras ideas, supongamos que el hecho sea la extracción de un número de una urna que contiene cien de ellos, y de los cuales ha sido sacado un solo número. Dos testigos de esta extracción anuncian que ha sido sacado el número 2, y nos preguntamos por la probabilidad resultante de la totalidad de estos testimonios. Uno puede formar dos hipótesis: o bien los testigos dicen la verdad o bien los testigos engañan. En la primera hipótesis, el número 2 es sacado y la probabilidad de este evento es $\frac{1}{100}$. Es necesario multiplicarla por el producto de las veracidades de los testigos, veracidades que supondremos que son $\frac{9}{10}$ y $\frac{7}{10}$; entonces uno tendrá $\frac{63}{10000}$ como la probabilidad del evento observado en esta hipótesis. En la segunda, el número 2 no es sacado y la probabilidad de este evento es $\frac{99}{100}$. Pero el acuerdo de los testigos requiere que, al pretender engañar, ambos elijan al número 2 de entre los 99 números no sacados: la probabilidad de esta elección, si es que los testigos no tienen un pacto secreto, es el producto de la fracción $\frac{1}{99}$ por sí misma; se hace necesario, entonces, multiplicar estas dos probabilidades juntas, y por el producto de las probabilidades $\frac{1}{10}$ y $\frac{3}{10}$ de que los testigos engañen; así, uno tendrá $\frac{1}{330000}$ como la probabilidad del evento observado en la segunda hipótesis. Ahora uno tendrá la probabilidad del hecho atestiguado o de la extracción del número 2 al dividir la probabilidad relativa a la primera hipótesis entre la suma de las probabilidades relativas a las dos hipótesis; esta probabilidad será entonces $\frac{2079}{2080}$, y la probabilidad del fracaso de sacar este número y de la falsedad de los testigos será $\frac{1}{2080}$.

Si la urna contiene únicamente los números 1 y 2, uno encontraría igualmente $\frac{21}{22}$ como la probabilidad de la extracción del número 2, y consecuentemente $\frac{1}{22}$ como la probabilidad de la falsedad de los testigos, una probabilidad al menos noventa y cuatro veces mayor que la anterior. Uno ve, por esto, cuánto disminuye la probabilidad de la falsedad de los testigos cuando el hecho que atestiguan es en sí mismo menos probable. En efecto, uno concibe entonces que el acuerdo de los testigos, cuando engañan, se hace más difícil, al menos cuando no tienen un acuerdo secreto, que no hemos supuesto aquí en absoluto.

En el caso anterior, donde la urna contenía solamente dos números, la probabilidad *a priori* del hecho atestiguado es $\frac{1}{2}$, y la probabilidad resultante de los testimonios es el producto de las veracidades de los testigos dividido entre este producto añadido al de las respectivas probabilidades de su falsedad.

Ahora nos queda considerar la influencia del tiempo sobre la probabilidad de los hechos transmitidos por una cadena tradicional de testigos. Es claro que esta probabilidad debe disminuir en proporción a medida que la cadena se prolonga. Si el hecho en sí no tiene ninguna probabilidad, como la extracción de un número de una urna que contiene un infinito de ellos, aquella [probabilidad] que adquiere por los testimonios disminuye de acuerdo con el producto continuo de la veracidad de los testigos. Si el hecho en sí tiene una probabilidad, si, por ejemplo, este hecho es la extracción del número 2 de una urna que contiene un infinito de ellos, y de los cuales es seguro que alguien ha sacado un solo número, aquello que la cadena tradicional añade a esta probabilidad decrece, siguiendo un producto continuo del cual el primer factor es la proporción del número de números en la urna menos uno al mismo número, y del cual cada otro factor es la veracidad de cada testigo disminuida por la proporción de la probabilidad de su falsedad al número de los números en la urna menos uno; así que el límite de la probabilidad del hecho es el de este hecho considerado *a priori*, o independientemente de los testimonios, una probabilidad igual a la unidad dividida por el número de los números en la urna.

La acción del tiempo debilita entonces, sin cesar, la probabilidad de los hechos históricos justo como transforma los monumentos más duraderos. En realidad, uno puede disminuirla al multiplicar y conservar los testimonios y los monumentos que ellos sostienen. Para este propósito la imprenta ofrece un gran medio, desafortunadamente desconocido para los antiguos. A pesar de las infinitas ventajas que procura, las revoluciones físicas y morales por las que la superficie de este globo siempre se verá agitado terminarán por hacer dudosos, después de miles de años y en conjunción con el inevitable efecto del tiempo, los hechos históricos considerados hoy en día como los más ciertos.

Craig ha intentado someter al cálculo el debilitamiento gradual de las pruebas de la religión cristiana; suponiendo que el mundo deba terminar en la época cuando dejará de ser probable, encuentra que esto debe tener lugar 1454 años después del tiempo en el que escribe. Pero su análisis es tan defectuoso como su hipótesis sobre la duración de la luna es bizarra.

CAPÍTULO XII

ACERCA DE LAS ELECCIONES Y LAS DECISIONES DE LAS ASAMBLEAS

La probabilidad de las decisiones de una asamblea depende de la pluralidad de los votos, así como de la inteligencia y la imparcialidad de los miembros que la componen. Tantas pasiones e intereses particulares suelen agregar su influencia que es imposible someter esta probabilidad al cálculo. Hay, sin embargo, algunos resultados generales dictados por el simple sentido común y confirmados por el cálculo. Si, por ejemplo, la asamblea está pobremente informada sobre el tema sujeto a su decisión, si este tema requiere consideraciones delicadas, o si la verdad sobre este punto es contraria a prejuicios establecidos, de modo que sería una apuesta de más de uno contra uno que cada votante erre, entonces la decisión de la mayoría será probablemente incorrecta, y el temor ante ella estará mejor fundado a medida que la asamblea sea más numerosa. En los asuntos públicos es importante, entonces, que las asambleas pasen por temas al alcance del mayor número; que la información esté difundida generalmente, y que los buenos trabajos fundados en la razón y la experiencia iluminen a aquellos que están llamados a decidir la suerte de sus semejantes o a gobernarlos, y deban advertirles de ideas falsas y de los prejuicios de la ignorancia. Los estudiosos han tenido ocasiones frecuentes para hacer notar que las primeras concepciones a menudo engañan y que la verdad no siempre es probable.

Resulta difícil comprender y definir el deseo de una asamblea en medio de una variedad de opiniones de sus miembros. Intentemos proporcionar algunas reglas con respecto a este asunto al considerar los dos casos más ordinarios: la elección entre varios candidatos, y entre varias proposiciones relativas al mismo tema.

Cuando una asamblea tiene que elegir entre varios candidatos que se presentan para uno o varios puestos del mismo tipo, lo que parece más simple es que cada votante escriba en una boleta los nombres de todos los candidatos de acuerdo con el orden de mérito que les atribuya. Suponiendo que los clasifica de buena fe, la inspección de estas boletas dará los resultados de las elecciones de tal modo que los candidatos puedan ser comparados entre sí; así que nuevas elecciones no pueden ofrecer nada más a este respecto. Ahora es una cuestión de concluir el orden de preferencia que establecen las boletas entre los candidatos. Imaginemos que a cada votante se le da una urna que contiene un infinito de bolas por medio de las cuales es capaz de matizar todos los grados de mérito de los candidatos; concibamos que de esta urna saca un número de bolas proporcional al mérito de cada candidato, y supongamos a este número escrito en una boleta al lado del nombre del candidato. Es claro que, al llevar a cabo una suma de todos los números relativos a cada candidato sobre cada boleta, aquel candidato que tenga la suma más grande será el candidato preferido por la asamblea, y que, en general, el orden de preferencia de los candidatos será el de las sumas relativas a cada uno de ellos. Pero las boletas no dan cuenta del número de bolas que cada votante da a los candidatos; solamente indican que el primero tiene más que el segundo, el segundo más que el tercero, y así sucesivamente. Suponiendo entonces sobre una boleta dada un cierto número de bolas, todas las combinaciones de los números inferiores que satisfacen las condiciones anteriores son igualmente admisibles, y uno tendrá el número de bolas relativo a cada candidato al llevar a cabo una suma de todos los números que le da cada combinación y al dividirla por el número total de combinaciones. Un análisis muy sencillo muestra que los números que deben ser escritos en cada boleta al lado del apellido, del primero antes del último, etc., son proporcionales a los términos de la progresión aritmética 1, 2, 3, etc. Escribiendo así sobre cada boleta los términos de esta progresión, y añadiendo los términos relativos a cada candidato en estas boletas, las diversas sumas indicarán, por su magnitud, el orden de preferencia que debe establecerse entre los candidatos. Tal es el modo de elección señalado por la teoría de las probabilidades. Sin duda, sería mejor si cada votante escribiera en su boleta los nombres de los candidatos en el orden del mérito que les atribuye. Pero los intereses particulares y muchas consideraciones extrañas sobre el mérito afectarían este orden y a veces pondrían, en el último lugar, al candidato más formidable que uno prefiere, lo que daría demasiada ventaja a los candidatos de mérito mediocre. Del mismo modo, la experiencia ha propiciado el abandono de este modo de elección en las sociedades que lo han adoptado.

La elección por mayoría absoluta de los sufragios une, a la certeza de no admitir a cualquiera de los candidatos rechazados por esta mayoría, la ventaja de expresar más a menudo el deseo de la asamblea. Siempre coincide con el modo anterior cuando haya solamente dos candidatos. En realidad, expone a una asamblea al inconveniente de hacer elecciones interminables. Pero la experiencia ha mostrado que este inconveniente es nulo, y que el deseo general por poner un pronto fin a las elecciones unifica la mayoría de los sufragios sobre uno de los candidatos.

La elección entre varias proposiciones relativas al mismo objeto debería estar sujeta, al parecer, a las mismas reglas que la elección entre varios candidatos. Pero entre los dos casos existe esta diferencia: que el mérito de un candidato no excluye el de sus competidores; pero si es necesario elegir entre proposiciones que son contrarias, la verdad de una excluye la verdad de las otras. Veamos entonces cómo es que uno debe considerar esta cuestión.

Demos a cada votante una urna que contiene un número infinito de bolas, y supongamos que las distribuye sobre las diversas proposiciones de acuerdo con las respectivas probabilidades que les atribuye. Es claro que, expresando certeza el número total de bolas, y estando seguro el votante – por la hipótesis – de que una de las proposiciones debe ser verdadera, distribuirá este número largamente sobre las proposiciones. Entonces el problema se reduce a determinar las combinaciones en las que las bolas serán distribuidas de tal modo que pueda haber más de ellas sobre la primera proposición de la boleta que sobre la segunda, más sobre la segunda que sobre la tercera, etc.; a hacer las sumas de todos los números de bolas relativos a cada proposición en las diversas combinaciones, y a dividir esta suma entre el número de combinaciones; los cocientes serán los números de bolas que uno debe atribuir a las proposiciones sobre una cierta boleta. Por medio del análisis uno descubre que, yendo desde la última proposición, estos cocientes son entre ellos como las siguientes cantidades: primera, la unidad dividida por el número de proposiciones; segunda, la cantidad anterior, aumentada por una unidad, dividida por el número de proposiciones menos uno; tercera, esta segunda cantidad, aumentada por una unidad, dividida por el número de proposiciones menos dos, y así para las demás. Entonces uno escribirá sobre cada boleta estas cantidades al lado de las proposiciones correspondientes, y añadiendo las cantidades relativas a cada proposición sobre las diversas boletas, la sumas indicarán, por su magnitud, el orden de preferencia que da la asamblea a estas proposiciones.

Digamos algo sobre la manera de renovar asambleas que deben cambiarse en su totalidad en un número de años definido. ¿La renovación debe hacerse de una sola vez, o resulta más ventajoso dividirla entre estos años? De acuerdo con el último método, la asamblea estaría formada bajo la influencia de las diversas opiniones dominantes durante el tiempo de su renovación; entonces la opinión obtenida sería probablemente la media de todas estas opiniones. La asamblea recibiría así, en el momento, la misma ventaja que se le da por la extensión de las elecciones de sus miembros a todas las partes del territorio que representa. Ahora, si uno considera aquello que la experiencia ha enseñado muy claramente, a saber, que las elecciones siempre están dirigidas, en el mayor grado, por opiniones dominantes, uno se dará cuenta de qué tan útil resulta moderar estas opiniones, las unas por las otras, por medio de una renovación parcial.

CAPÍTULO XIII

ACERCA DE LA PROBABILIDAD DE LOS JUICIOS DE LOS TRIBUNALES

El análisis confirma lo que el simple sentido común nos enseña, a saber, la corrección de los juicios es tanto más probable cuando los juicios sean más numerosos y más iluminados. Es importante, entonces, que los tribunales de apelación satisfagan estas dos condiciones. Los tribunales de primera instancia, estando en una relación más cercana con aquellos persuasibles, ofrecen al tribunal superior la ventaja de un primer juicio ya probable, y con el cual el último a menudo concuerda, ya sea comprometiéndose con o desistiendo de sus reclamaciones. Pero si la incertidumbre del asunto en litigio y su importancia determinan que un litigante tenga que recurrir al tribunal de apelaciones, debería encontrar, en una mayor probabilidad de obtener un juicio equitativo, mayor seguridad para su fortuna y la compensación por las molestias y los gastos que conlleva un nuevo procedimiento. Es esto lo que no tuvo lugar en la institución de la apelación recíproca de los tribunales de distrito, una institución de este modo muy perjudicial para el interés de los ciudadanos. Quizá sería apropiado y conforme al cálculo de probabilidades demandar una mayoría de al menos dos votos en un tribunal de apelación para invalidar la sentencia del tribunal inferior. Uno obtendría este resultado si, el tribunal de apelación estando compuesto por un número par de jueces, la sentencia se mantuviera en el caso de la igualdad de votos.

Consideraré particularmente los juicios en asuntos criminales.

Para condenar a un acusado es necesario que sin duda alguna los jueces tengan las pruebas más fuertes de su ofensa. Pero una prueba moral nunca es más que una probabilidad, y la experiencia ha mostrado muy claramente los errores a los que los juicios criminales, incluso aquellos que parecen ser los más justos, siguen siendo susceptibles. La imposibilidad de enmendar estos errores es el argumento más fuerte de los filósofos que han deseado proscribir la pena de muerte. Debemos entonces estar obligados a abstenernos de juzgar si nos fuese necesario esperar evidencia matemática. Pero el juicio es requerido por el peligro que resultaría de la impunidad del crimen. Este juicio se reduce, si no me equivoco, a la solución de la siguiente pregunta: ¿Tiene la prueba de la ofensa del acusado el alto grado de probabilidad necesario a fin de que los ciudadanos tendrían menos razón para dudar de los errores de los tribunales, si es inocente y condenado, de la que tendrían para temer sus nuevos crímenes y aquellos de los desafortunados que estarían envalentonados por el ejemplo de su impunidad si fuese culpable y absuelto? La solución de esta cuestión depende de varios elementos muy difíciles de comprobar. Tal es la eminencia del peligro que amenazaría a la sociedad si el criminal acusado quedase impune. A veces este peligro es tan grande que el magistrado se ve obligado a renunciar a formas sabiamente establecidas para la protección de la inocencia. Pero lo que casi siempre hace que esta cuestión sea insoluble es la imposibilidad de apreciar con exactitud la probabilidad de la ofensa y de fijar aquello que resulta necesario para la condena del acusado. En este aspecto, cada juez se ve forzado a depender de su propio juicio. Forma su opinión al comparar los diversos testimonios y las circunstancias por las que está acompañada la ofensa con los resultados de sus reflexiones y sus experiencias, y a este respecto un largo hábito de interrogar y juzgar personas acusadas proporciona una gran ventaja al momento de determinar la verdad en medio de indicios a menudo contradictorios.

La cuestión anterior depende, una vez más, del cuidado tomado en la investigación de la ofensa; pues uno naturalmente demanda pruebas mucho más fuertes para imponer la pena de muerte que para infligir una detención de unos cuantos meses. Es una razón para proporcionar cuidado a la ofensa, [ya que] un gran cuidado tomado en un caso sin importancia inevitablemente aclara muchos culposos. Una ley que da a los jueces la facultad de moderar el cuidado en el caso de atenuar circunstancias resulta entonces conforme, al mismo tiempo, con los principios de la humanidad hacia el culpable y con el interés de la sociedad. El producto de la probabilidad de la ofensa por su gravedad siendo la medida del peligro al que la absolución del acusado puede exponer a la sociedad, uno pensaría que el cuidado tomado debe depender de esta probabilidad. Esto se hace indirectamente en los tribunales donde se retiene por algún tiempo al acusado contra el que existan pruebas muy fuertes pero insuficientes para condenarlo; con la esperanza de adquirir nueva luz, uno no lo pone inmediatamente en medio de sus compañeros ciudadanos, quienes no lo verían sin alarmarse. Pero la arbitrariedad de esta medida y el abuso que puede hacerse de ella han causado su rechazo en los países donde se pone el mayor de los precios a la libertad individual.

Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que la decisión de un tribunal que puede condenar sólo a partir de una mayoría dada sea justa, esto es, conforme con la verdadera solución de la cuestión propuesta arriba? Este importante problema, bien resuelto, dará los medios para que los distintos tribunales se comparen entre sí. La mayoría por un solo voto en un tribunal numeroso indica que el asunto en cuestión es muy dudoso; la condena del acusado sería entonces contraria a los principios de la humanidad, protectores de la inocencia. La unanimidad de los jueces daría muy fuerte probabilidad a una decisión justa, pero al abstenerse de ella serían absueltos demasiados culpables. Es necesario, pues, o bien limitar el número de jueces si uno desea que sean unánimes, o bien incrementar la mayoría necesaria para una condena cuando el tribunal se hace más numeroso. Intentaré aplicar el cálculo a este asunto, estando persuadido de que es siempre la mejor guía cuando uno lo basa en los datos que nos sugiere el sentido común.

La probabilidad de que la opinión de cada juez sea justa entra como el elemento principal en este cálculo. Si en un tribunal de mil un jueces, quinientos uno son de una opinión, y quinientos son de la opinión contraria, es evidente que la probabilidad de la opinión de cada juez supera muy poco $\frac{1}{2}$, pues suponiéndola obviamente muy grande, un solo voto de diferencia sería un evento improbable. Pero si los jueces son unánimes, esto indica en las pruebas aquel grado de fuerza que conlleva la convicción; la probabilidad de la opinión de cada juez es entonces muy cercana a la unidad o a la certeza, siempre que las pasiones o los prejuicios ordinarios no afecten al mismo tiempo a todos los jueces. Fuera de estos casos, la proporción de los votos a favor o en contra del acusado debe por sí sola determinar esta probabilidad. Supongo, así, que puede variar desde $\frac{1}{2}$ hasta la unidad, pero que no puede estar por debajo de $\frac{1}{2}$. Si ese no fuere el caso, la decisión del tribunal sería tan insignificante como el azar; sólo tiene valor en tanto que la opinión de los jueces tenga mayor tendencia hacia la verdad que hacia el error. Es así que, por la proporción de los números de votos favorables, y [de los] contrarios al acusado, determino la probabilidad de esta opinión.

Estos datos bastan para determinar la expresión general de la probabilidad de que la decisión de un tribunal juzgando por una mayoría conocida sea justa. En los tribunales en los que de ocho jueces cinco votos serían necesarios para la condena de un acusado, la probabilidad del error a ser temido en la justicia de la decisión superaría $\frac{1}{4}$. Si el tribunal se redujera a seis miembros quienes son capaces de condenar sólo por una pluralidad [mayoría] de cuatro votos, la probabilidad del error a ser temido estaría por debajo de $\frac{1}{4}$. Habría entonces, para el acusado, una ventaja en esta reducción del tribunal. En ambos casos la mayoría requerida es la misma y es igual a dos. Así, permaneciendo constante la mayoría, la probabilidad de error aumenta con el número de jueces; esto es general sea cual sea la mayoría requerida, siempre que siga siendo la misma. Tomando entonces por regla la proporción aritmética, el acusado se encuentra en una posición cada vez menos ventajosa en la medida en que el tribunal se hace más numeroso. Uno podría creer que en un tribunal en el que uno pueda demandar una mayoría de doce votos, sea cual sea el número de jueces – los votos de la minoría neutralizando un igual número de votos de la mayoría – los doce votos restantes representarían la unanimidad de un jurado de doce miembros, requeridos en Inglaterra para la condena de un acusado; pero uno estaría muy equivocado.

El sentido común muestra que existe una diferencia entre la decisión de un tribunal de doscientos doce miembros, de los cuales ciento doce condenan al acusado, mientras que cien lo absuelven, y la de un tribunal de doce jueces unánimes en la condena. En el primer caso los cien votos favorables al acusado justifican el pensamiento de que las pruebas están lejos de alcanzar el grado de fuerza que conlleva la convicción; en el segundo caso, la unanimidad de los jueces conduce a la creencia de que han alcanzado este grado. Pero el simple sentido común no basta, en absoluto, para apreciar la diferencia extrema de la probabilidad de error en los dos casos. Es necesario, pues, recurrir al cálculo, y uno encuentra casi un quinto para la probabilidad de error en el primer caso y solamente $\frac{1}{8192}$ para esta probabilidad en el segundo caso, una probabilidad que no es una milésima de la primera. Es una confirmación del principio de que la proporción aritmética es desfavorable para el acusado cuando aumenta el número de jueces. Por el contrario, si uno toma por regla la proporción geométrica, la probabilidad del error de la decisión disminuye cuando aumenta el número de jueces. Por ejemplo, en los tribunales que pueden condenar sólo por una pluralidad [mayoría] de dos tercios de los votos, la probabilidad del error a ser temido es casi un cuarto si el número de los jueces es seis; está por debajo de $\frac{1}{7}$ si este número aumenta a doce. Así, uno no debe regirse ni por la proporción aritmética ni por la geométrica si desea que la probabilidad de error nunca esté por encima ni por debajo de una fracción dada.

Pero entonces, ¿qué fracción debe ser determinada? Es aquí donde comienza la arbitrariedad y donde los tribunales ofrecen la mayor variedad. En los tribunales especiales, donde cinco de ocho votos bastan para la condena del acusado, la probabilidad del error a ser temido con respecto a la justicia del juicio es $\frac{65}{256}$, o más de $\frac{1}{4}$. La magnitud de esta fracción es terrible; pero aquello que debe tranquilizarnos un poco es la consideración de que muy frecuentemente el juez que absuelve a un acusado no lo considera inocente, [sino que] solamente pronuncia que no cuenta con pruebas suficientes para la condena. Uno se tranquiliza especialmente por la compasión que ha puesto la naturaleza en el corazón del hombre y que dispone a la mente a ver sólo con renuencia a un culpable en el acusado sujeto a su juicio. Este sentimiento, más activo en aquellos que no están habituados a juicios criminales, compensa los inconvenientes ligados a la inexperiencia de los miembros del jurado. En un jurado de doce miembros, si la pluralidad [mayoría] demandada para la condena consiste en ocho de doce votos, la probabilidad del error a ser temido $\frac{1093}{8192}$, o un poco más que un octavo, es casi $\frac{1}{22}$ si esta pluralidad [mayoría] consiste en nueve votos.

En el caso de unanimidad, la probabilidad del error a ser temido es $\frac{1}{8192}$, esto es, más que mil veces menor que en nuestros jurados. Esto supone que la unanimidad resulta solamente de pruebas favorables o contrarias al acusado; pero motivos totalmente ajenos concurren a menudo en su producción cuando está impuesta al jurado como una condición necesaria de su juicio. Entonces sus decisiones, dependiendo del temperamento, del carácter, de los hábitos de los miembros del jurado, y de las circunstancias en las que están puestos, son a veces contrarias a las decisiones que la mayoría del jurado tendría si hubiese puesto atención únicamente a las pruebas. Me parece que esto es una gran falla en este modo de juzgar.

La probabilidad de la decisión es demasiado débil en nuestros jurados, y creo que, con el fin de ofrecer una garantía suficiente a la inocencia, deberíamos demandar al menos una pluralidad [mayoría] de nueve votos de doce.

CAPÍTULO XIV

ACERCA DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD, Y DE LAS DURACIONES MEDIAS DE LA VIDA, DE LOS MATRIMONIOS, Y DE LAS ASOCIACIONES

La forma de preparar tablas de mortalidad es muy simple. Uno toma en los registros civiles un gran número de individuos cuyos nacimiento y muerte están indicados. Determina cuántos de estos individuos han muerto en el primer año de su vida, cuántos en el segundo, y así sucesivamente. Se concluye el número de individuos viviendo al comienzo de cada año, y este número se escribe en la tabla al lado del [número] que indica el año. Así, uno escribe al lado de cero el número de nacimientos; al lado del año 1 el número de infantes que han alcanzado un año; al lado del año 2 el número de infantes que han alcanzado dos años, y así para el resto. Pero ya que en los primeros dos años de vida la mortalidad es muy grande, en aras de una mayor exactitud es necesario indicar en esta primera edad el número de sobrevivientes al final de cada medio año.

Si dividimos la suma de los años de la vida de todos los individuos inscritos en una tabla de mortalidad entre el número de estos individuos tendremos la duración media de vida que corresponde a esta tabla. Para esto, multiplicaremos por un medio año el número de muertes en el primer año, un número igual a la diferencia de los números de individuos inscritos al lado de los años 0 y 1. Al estar su mortalidad distribuida a través de todo el año, la duración media de su vida es de sólo medio año. Multiplicaremos por un año y medio el número de muertes en el segundo año; por dos años y medio el número de muertes en el tercer año, y así sucesivamente. La suma de estos productos dividida entre el número de nacimientos será la duración media de vida. De esto es fácil concluir que obtendremos esta duración al realizar la suma de los números inscritos en la tabla al lado de cada año, dividirla por el número de nacimientos, y al sustraer un medio del cociente, tomando el año como unidad. La duración media de vida que queda, comenzando desde cualquier edad, se determina del mismo modo, trabajando sobre el número de individuos que han llegado a esta edad justo como se ha hecho con el número de nacimientos. Pero no es en el momento del nacimiento que la duración media de vida es la mayor; es cuando uno ha evadido los peligros de la infancia y tiene alrededor de cuarenta y tres años. La probabilidad de llegar a una cierta edad, comenzando desde una edad dada, es igual a la proporción de los dos números de individuos indicados en la tabla en estas dos edades.

La precisión de estos resultados requiere que, para la formación de las tablas, empleemos un gran número de nacimientos. El análisis ofrece fórmulas muy simples para apreciar la probabilidad de que los números indicados en estas tablas varíen de la verdad sólo dentro de límites estrechos. Por estas fórmulas vemos que el intervalo de los límites disminuye y que la probabilidad aumenta en proporción a medida que consideramos más nacimientos, de modo que las tablas representarían exactamente la verdadera ley de mortalidad si el número de nacimientos empleado fuese infinito.

Una tabla de mortalidad es, entonces, una tabla de la probabilidad de la vida humana. La proporción de los individuos inscritos al lado de cada año con el número de nacimientos es la probabilidad de que un nuevo nacimiento alcanzará este año. Así como estimamos el valor de esperanza al realizar una suma de los productos de cada beneficio esperado por la probabilidad de obtenerlo, así podemos igualmente evaluar la duración media de vida al añadir los productos de cada año por la mitad de la suma de las probabilidades de alcanzar su comienzo y su final, lo que lleva al resultado descubierto arriba. Pero esta manera de considerar la duración media de la vida tiene la ventaja de mostrar que en una población estacionaria, esto es, en una tal que el número de nacimientos iguale el de muertes, la duración media de vida es la propia proporción de la población con los nacimientos anuales, pues suponiendo estacionaria a la población, el número de individuos de una edad comprendida entre dos años consecutivos de la tabla es igual al número de nacimientos anuales multiplicado por la mitad de la suma de las probabilidades de alcanzar estos años; la suma de todos estos productos será entonces toda la población. Ahora es fácil ver que esta suma, dividida entre el número de nacimientos anuales, coincide con la duración media de vida tal como la hemos definido.

Por medio de una tabla de mortalidad es fácil formar la correspondiente tabla de la población supuesta a ser estacionaria. Para esto tomamos las medias aritméticas de los números de la tabla de mortalidad correspondientes a las edades cero y un año, uno y dos años, dos y tres años, etc. La suma de todas estas medias es toda la población, y se escribe al lado de la edad cero. Se sustrae de esta suma la primera media y el resto es el número de individuos de un año y hacia arriba; se escribe al lado del año 1. Se sustrae de este primer resto la segunda media; este segundo resto es el número de individuos de dos años y hacia arriba, y se escribe al lado del año 2, y así sucesivamente.

Tantas causas variables influyen en la mortalidad que las tablas que la representan deberían cambiar según el lugar y el tiempo. Los diversos estados de la vida ofrecen a este aspecto diferencias apreciables relativas a las fatigas y los peligros inseparables de cada estado y sobre los que resulta indispensable estar al tanto en los cálculos fundados sobre la duración de la vida. Pero estas diferencias no han sido lo suficientemente observadas. Algún día lo serán y entonces se sabrá qué sacrificio de vida demanda cada profesión, y de este conocimiento se servirá uno para disminuir los peligros.

La mayor o menor salubridad del sol, su elevación, su temperatura, las costumbres de los habitantes, y las operaciones de los gobiernos, tienen una influencia considerable en la mortalidad. Pero siempre es necesario preceder la investigación de la causa de las diferencias observadas por la [investigación] de la probabilidad con la que se indica esta causa. Así, la proporción de la población con los nacimientos anuales, que en Francia se ha elevado a veintiocho y un tercio, no es igual a [la de] veinticinco en el antiguo ducado de Milán. Estas proporciones, establecidas ambas sobre un gran número de nacimientos, no permiten poner en duda la existencia, entre los milaneses, de una causa especial de mortalidad, que el gobierno de nuestro país debe investigar y eliminar.

La proporción de la población a los nacimientos aumentaría una vez más si pudiésemos disminuir y eliminar ciertos males peligrosos y ampliamente difundidos. Esto se ha hecho felizmente para la viruela, primero con la inoculación de esta enfermedad, y después de un modo mucho más ventajoso, con la inoculación de la vacuna, el inestimable descubrimiento de Jenner, quien así se ha convertido en uno de los mayores benefactores de la humanidad.

La viruela tiene esto en particular, a saber, que el mismo individuo no se ve afectado dos veces por ella, o al menos tales casos son tan extraños que pueden abstraerse del cálculo. Esta enfermedad, de la que pocos escaparon antes del descubrimiento de su vacuna, es a menudo fatal, y causa la muerte de un séptimo de aquellos a quienes ataca. A veces es dócil, y la experiencia ha enseñado que puede dársele este último carácter al inocularla en personas sanas, preparadas para ella por una dieta apropiada y en una estación favorable. Entonces la proporción de los individuos que mueren con aquellos inoculados no es de un tricentésimo. Esta gran ventaja de inoculación, unida a aquella de no alterar la apariencia y de preservarse de las graves consecuencias que a menudo trae consigo la viruela natural, causó que fuese adoptada por un gran número de personas. La práctica fue recomendada fuertemente, aunque también fue combatida fuertemente, como suele ser el caso con cuestiones sujetas a la inconveniencia. En medio de esta disputa, Daniel Bernoulli propuso someter al cálculo de probabilidades la influencia de la inoculación sobre la duración media de la vida. Ya que no habían datos precisos de la mortalidad producida por la viruela en las diversas etapas de la vida, supuso que el peligro de tener esta enfermedad y el de morir de ella son los mismos en cada edad. Por medio de esta suposición consiguió convertir, por un análisis delicado, una tabla de mortalidad ordinaria en aquella que se utilizaría si la viruela no existiera, o si causase la muerte de sólo un número muy pequeño de aquellos afectados, y de ella concluyó que la inoculación aumentaría al menos en tres años la duración media de la vida, lo que le pareció que mostraba más allá de toda duda la ventaja de esta operación. D'Alembert atacó el análisis de Bernoulli: primero, con respecto a la incertidumbre de sus dos hipótesis, y después con respecto a su insuficiencia en que no fue hecha ninguna comparación del peligro inmediato, aunque muy pequeño, de morir de inoculación, con el peligro muy grande pero muy remoto de sucumbir ante la viruela natural. Esta consideración, que desaparece cuando uno considera un gran número de individuos, es por esta razón insignificante para los gobiernos, y las ventajas de la inoculación siguen valiendo para ellos; pero tiene un gran peso para el padre de familia quien debe temer, teniendo a sus hijos inoculados, ver que por esta causa fallece al que le tiene más cariño. Muchos padres estuvieron contenidos por este miedo que el descubrimiento de la vacuna felizmente ha disipado. Por uno de aquellos misterios que nos ofrece la naturaleza tan frecuentemente, la vacuna es una medida preventiva de la viruela tan segura como el virus de la variola, y no supone peligro alguno; no expone a ninguna enfermedad y requiere de muy pocos cuidados. Por tanto, su práctica se ha propagado rápidamente, y para hacerla universal sólo queda superar la inercia natural de la gente, contra la que es necesario luchar continuamente, incluso cuando es una cuestión de sus más caros intereses.

El medio más simple de calcular la ventaja que produciría la extinción de una enfermedad consiste en determinar por observación el número de individuos de una edad dada que mueren de ella cada año y sustraer este número del número de muertes en la misma edad. La proporción de la diferencia al número total de individuos de la edad dada sería la probabilidad de morir en el año a esta edad si la enfermedad no existiera. Haciendo, pues, una suma de estas probabilidades desde el nacimiento hasta cualquier edad dada, y sustrayendo esta suma de la unidad, el resto será la probabilidad de vivir hasta tal edad correspondiente a la extinción de la enfermedad. La serie de estas probabilidades será la tabla de mortalidad relativa a esta hipótesis, y de ella podemos concluir, por lo que precede, la duración media de la vida. Es así que Duvilard ha encontrado que el aumento de la duración media de la vida, debido a la inoculación con la vacuna, es de al menos tres años. Un aumento tan considerable produciría un aumento muy grande en la población si esta última, por otras razones, no estuviese contenida por la disminución relativa de subsistencias.

Es principalmente por la ausencia de subsistencias que se ve detenida la marcha progresiva de la población. En todos los tipos de animales y plantas, la naturaleza tiende sin cesar a aumentar el número de individuos hasta que estén al nivel de los medios de subsistencia. En la raza humana las causas morales tienen una gran influencia sobre la población. Si los desmontes del bosque proporcionan un sustento abundante para nuevas generaciones, la certeza de poder mantener a una familia numerosa alienta los matrimonios y los hace más productivos. Sobre la misma tierra la población y los nacimientos deben aumentar al mismo tiempo en progresión geométrica. Pero cuando los desmontes se hacen más difíciles y más raros, entonces el aumento de población disminuye; se acerca continuamente al estado variable de subsistencias, oscilando respecto a sí, justo como un péndulo cuya periodicidad se retarda al cambiar el punto de suspensión oscila respecto a este punto en virtud de su propio peso. Es difícil evaluar el aumento *máximo* de la población; después de las observaciones parece que en circunstancias favorables la población de la raza humana se duplicaría cada quince años. Estimamos que en

Norteamérica el periodo de esta duplicación es de veintidós años. En este estado de cosas, la población, los nacimientos, los matrimonios, la mortalidad, todos aumentan de acuerdo con la misma progresión geométrica de la cual tenemos la proporción constante de términos consecutivos por la observación de los nacimientos anuales en dos épocas.

Por medio de una tabla de mortalidad representando las probabilidades de la vida humana, podemos determinar la duración de los matrimonios. Suponiendo, con el fin de simplificar el asunto, que la mortalidad es la misma para los dos sexos, obtendremos la probabilidad de que el matrimonio subsista un año, o dos, o tres, etc., al formar una serie de fracciones cuyo denominador común es el producto de los dos números de la tabla correspondientes a las edades de los consortes, y cuyos numeradores son los productos sucesivos de los números correspondientes a estas edades aumentados por uno, por dos, por tres, etc., años. La suma de estas fracciones aumentada por un medio será la duración media del matrimonio, tomando el año como unidad. Es fácil extender la misma regla a la duración media de una asociación formada por tres o por un mayor número de individuos.

CAPÍTULO XV

ACERCA DE LOS BENEFICIOS DE LAS INSTITUCIONES QUE DEPENDEN DE LA PROBABILIDAD DE EVENTOS

Recordemos lo dicho sobre la esperanza. Hemos visto que, con el fin de obtener la ventaja que resulta de varios eventos simples, de los cuales unos producen un beneficio y los otros una pérdida, es necesario añadir los productos de la probabilidad de cada evento favorable por el beneficio que procura, y sustraer de su suma la [suma] de los productos de la probabilidad de cada evento desfavorable por la pérdida que se le adjunta. Pero cualquiera que sea la ventaja expresada por la diferencia de estas sumas, un solo evento compuesto por estos eventos simples no es garantía en contra del miedo de experimentar una pérdida. Uno imagina que este miedo debe decrecer cuando uno multiplica al evento compuesto. El análisis de las probabilidades conduce a este teorema general.

Por la repetición de un evento ventajoso, simple o compuesto, el beneficio real se vuelve cada vez más probable y aumenta sin cesar; se vuelve cierto en la hipótesis de un número infinito de repeticiones, y al dividirlo por este número el cociente o el beneficio medio de cada evento es la propia esperanza matemática o la ventaja relativa al evento. Es lo mismo con una pérdida que se vuelve cierta a la larga, por más pequeña que pueda ser la desventaja del evento.

Este teorema sobre los beneficios y las pérdidas es análogo a aquellos que recién hemos ofrecido sobre las proporciones indicadas por la repetición indefinida de eventos simples o compuestos; y, como aquellos, prueba que la regularidad termina por establecerse incluso en las cosas que están más subordinadas a aquello que llamamos *azar*.

Cuando los eventos son en gran número, el análisis ofrece otra expresión muy simple de la probabilidad de que el beneficio esté comprendido dentro de límites determinados. Esta es la expresión que entra, una vez más, en la ley general de la probabilidad dada arriba al hablar de las probabilidades que resultan de la multiplicación indefinida de eventos.

La estabilidad de las instituciones que están basadas sobre probabilidades depende de la verdad del teorema anterior. Pero para que pueda serles aplicado, es necesario que tales instituciones multipliquen estos eventos ventajosos por el bien de numerosas cosas.

Sobre las probabilidades de la vida humana se han basado diversas instituciones, como las rentas vitalicias y las tontinas. El método más general y más simple de calcular los beneficios y los gastos de estas instituciones consiste en reducir éstos a cantidades reales. El interés anual de unidad es lo que se llama *tasa de interés*. Al final de cada año, una cantidad adquiere por factor la unidad más la tasa de interés; aumenta entonces de acuerdo con una progresión geométrica de la que este factor es la proporción. Así, en el curso del tiempo se vuelve inmensa. Si, por ejemplo, la tasa de interés es $\frac{1}{20}$ o cinco por ciento, el capital se duplica en casi catorce años, se cuadruplica en veintinueve años, y en menos de tres siglos se vuelve dos millones de veces mayor.

Un aumento tan prodigioso ha dado lugar a la idea de hacer uso de él con el fin de saldar la deuda pública. Para este propósito se forma un fondo de amortización al que se dedica un fondo anual empleado para el rescate de las cuentas públicas y que sin cesar aumenta por el interés de las cuentas redimidas. Es claro que, a la larga, este fondo absorberá gran parte de la deuda nacional. Si, cuando las necesidades del Estado requieren de un préstamo, se destina una parte de este préstamo al incremento del fondo de amortización anual, la variación de las cuentas públicas será menor; la confianza de los prestamistas y la probabilidad de retirarse sin perder capital prestado cuando uno lo desee aumentarán y harán menos onerosas las condiciones del prestamista. Estas ventajas han sido completamente confirmadas por experiencias favorables. Pero la fidelidad en los compromisos y la estabilidad, tan necesarias para el éxito de tales instituciones, sólo puede garantizarlas un gobierno en el que el poder legislativo esté dividido en varios poderes independientes. La confianza que inspira la cooperación necesaria de estos poderes duplica la fuerza del Estado, y el propio soberano gana en poder legal más de lo que pierde en poder arbitrario.

De lo anterior resulta que el capital real equivalente a una suma que ha de pagarse sólo después de un cierto número de años es igual a esta suma multiplicada por la probabilidad de que será pagada en ese tiempo y dividida por la unidad aumentada por la tasa de interés y elevada a una potencia expresada por el número de estos años.

Es fácil aplicar este principio a rentas vitalicias de una o varias personas, y a cajas de ahorro, y a sociedades de aseguramiento de cualquier naturaleza. Supongamos que uno propone formar una tabla de rentas vitalicias de acuerdo con una tabla de mortalidad dada. Una renta vitalicia pagable al final de cinco años, por ejemplo, y reducida a una cantidad real es, por este principio, igual al producto de las dos siguientes cantidades, a saber, la anualidad dividida entre la quinta potencia de unidad aumentada por la tasa de interés y la probabilidad de pagarla. Esta probabilidad es la proporción inversa del número de individuos inscritos en la tabla opuesta a la edad de aquel que liquida la anualidad al número inscrito opuesto a esta edad aumentada por cinco años. Formando, entonces, una serie de fracciones cuyos denominadores son los productos del número de personas indicadas en la tabla de mortalidad como vivas a la edad de aquel que liquida la anualidad por las potencias sucesivas de unidad aumentada por la tasa de interés, y cuyos numeradores son los productos de la anualidad por el número de personas viviendo a la misma edad aumentada sucesivamente por un año, por dos años, etc., la suma de estas fracciones será la cantidad requerida para la renta vitalicia en esa edad.

Supongamos que una persona desea, por medio de una renta vitalicia, asegurar a sus herederos una cantidad pagable al final del año de su muerte. Con el fin de determinar el valor de esta anualidad, uno puede imaginar que la persona tomó a préstamo de un banco este capital y que lo puso a interés perpetuo en el mismo banco. Es claro que este mismo capital lo deberá el banco a sus herederos al final del año de su muerte; pero habrá pagado cada año sólo el exceso del usufructo sobre el interés perpetuo. La tabla de rentas vitalicias mostrará entonces aquello que la persona debe pagar anualmente al banco con el fin de asegurar este capital después de su muerte.

El aseguramiento marítimo, aquel en contra del fuego y las tormentas, y por lo general todas las instituciones de este tipo, se computan sobre los mismos principios. Un comerciante teniendo embarcaciones en el mar desea asegurar su valor y el de sus cargamentos en contra de los peligros que puedan surgir; para esto, da una suma a una compañía que se hace responsable ante él por el valor estimado de sus cargamentos y sus embarcaciones. La proporción de este valor a la suma que debería darse por el precio del aseguramiento depende de los peligros a los que están expuestas las embarcaciones, y puede apreciarse solamente por numerosas observaciones sobre el destino de embarcaciones que han salido del puerto en la misma dirección.

Si las personas aseguradas diesen a la compañía aseguradora solamente la suma indicada por el cálculo de probabilidades, esta compañía no sería capaz de proveer los gastos de su institución; es necesario entonces que paguen una suma mucho mayor que el costo de tal seguro. ¿Cuál es entonces su ventaja? Es aquí que se hace necesaria la consideración de la desventaja moral ligada a una incertidumbre. Uno concibe que el juego más justo se vuelva desventajoso, como ya hemos visto, porque el jugador intercambia una apuesta segura por un beneficio incierto; el seguro por el cual uno intercambia lo incierto por lo cierto debería ser ventajoso. De hecho, esto es lo que resulta de la regla que hemos dado antes para determinar la esperanza moral y por la que por otra parte uno ve hasta qué punto puede extenderse el sacrificio que debe hacerse a la compañía de seguros reservando siempre una ventaja moral. Esta compañía puede entonces, al procurar esta ventaja, obtener un gran beneficio si el número de las personas aseguradas es muy grande, una condición necesaria para su existencia continuada. Entonces sus beneficios se vuelven ciertos y las esperanzas matemática y moral coinciden, pues el análisis conduce a este teorema general, a saber, que si las expectativas son muy numerosas las dos esperanzas se acercan entre sí sin cesar y terminan por coincidir en el caso de un número infinito.

Hemos dicho, al hablar de las esperanzas matemática y moral, que hay una ventaja moral en distribuir los riesgos de un beneficio que uno espera sobre varias de sus partes. Así, al enviar una suma de dinero a un lugar distante es mucho mejor enviarla en varios barcos que exponerla en uno. Esto se hace por medio de garantías mutuas. Si dos personas, cada una teniendo la misma suma en dos barcos distintos que han salido del mismo puerto hacia el mismo destino, concuerdan en dividir igualmente todo el dinero que pueda llegar, es claro que por este acuerdo cada una de ellas divide igualmente entre los dos barcos la suma que espera. En realidad, este tipo de garantía siempre deja incertidumbre en cuanto a la pérdida que uno pueda temer. Pero esta incertidumbre disminuye en proporción a medida que aumenta el número de asegurados; la ventaja moral aumenta más y más y termina por coincidir con la ventaja matemática, su límite natural. Esto hace que la asociación de garantías mutuas, cuando es muy numerosa, sea más ventajosa para los asegurados que para las compañías de seguros que, en proporción al beneficio que dan, ofrecen una ventaja moral siempre inferior a la ventaja matemática. Pero la supervisión de su administración puede balancear la ventaja de las garantías mutuas. Todos estos resultados son, como ya se ha visto, independientes de la ley que expresa la ventaja moral.

Uno puede considerar un pueblo libre como una gran asociación cuyos miembros aseguran mutuamente sus propiedades al respaldar proporcionalmente los cargos de esta garantía. La confederación de varios pueblos les daría ventajas análogas a aquellas que cada individuo disfruta en la sociedad. Un congreso de sus representantes discutiría temas de utilidad común para todos, y sin duda el sistema de pesos, medidas, y dineros propuesto por los científicos franceses se adoptaría en este congreso como una de las cosas más útiles para las relaciones comerciales.

De entre las instituciones fundadas sobre las probabilidades de la vida humana, las mejores son aquellas en las que, por medio de un ligero sacrificio de su beneficio, uno asegura su existencia y la de su familia para un tiempo en el que uno debería temer ser incapaz de satisfacer sus necesidades. En tanto que los juegos sean inmorales, tanto más son ventajosas estas instituciones para las costumbres al favorecer los lazos más fuertes de nuestra naturaleza. El gobierno debe entonces alentarlas y respetarlas en las vicisitudes de la fortuna pública. Ya que las esperanzas que presentan miran hacia un futuro distante, son capaces de prosperar sólo cuando están resguardadas de toda inquietud durante su existencia. Es una ventaja que les asegura la institución de un gobierno representativo.

Digamos unas palabras sobre los préstamos. Es claro que para pedir prestado perpetuamente es necesario pagar cada año el producto del capital por la tasa de interés. Pero uno puede desear pagar este capital en pagos iguales hechos durante un número definido de años, pagos que son llamados *anualidades* y cuyo valor se obtiene de este modo. Cada anualidad, para ser reducida al momento actual, debe dividirse entre una potencia de unidad aumentada por la tasa de interés igual al número de años después de los cuales esta anualidad debe ser pagada. Formando pues una progresión geométrica cuyo primer término es la anualidad dividida entre la unidad aumentada por la tasa de interés, y cuyo último término es esta anualidad dividida entre la misma cantidad elevada a una potencia igual al número de años durante los cuales debió haberse hecho el pago, la suma de esta progresión será equivalente al capital prestado, que determinará el valor de la anualidad. Un fondo de amortización es, en el fondo, sólo un medio para convertir en anualidades una renta perpetua, con la única diferencia de que en el caso de un préstamo por anualidades el interés se supone constante, mientras que el interés de fondos adquirido por el fondo de amortización es variable. Si fuese el mismo en ambos casos, la anualidad correspondiente a los fondos adquiridos estaría formada por estos fondos y por esta anualidad con la que el Estado contribuye anualmente al fondo de amortización.

Si uno desea tomar un préstamo vitalicio debe observar que las tablas de rentas vitalicias ofrecen el capital requerido para constituir una renta vitalicia a cualquier edad, y una proporción simple dará la renta que debe uno pagar al individuo de quien se tomó prestado el capital. Desde estos principios pueden calcularse todos los tipos posibles de préstamos.

Los principios recién expuestos concernientes a los beneficios y las pérdidas de las instituciones pueden servir para determinar el resultado medio de cualquier número de observaciones ya realizadas cuando uno desea considerar las desviaciones de los resultados correspondientes a diversas observaciones. Designemos por x la corrección del resultado menor y por x aumentada sucesivamente por q, q', q'', etc., las correcciones de los siguientes resultados. Llamemos e, e', e'', etc., a los errores de las observaciones cuya ley de probabilidad supondremos como conocida. Siendo cada observación una función del resultado, es fácil ver que, suponiendo como muy pequeña la corrección x de este resultado, el error e de la primera observación será igual al producto de x por un coeficiente determinado. Igualmente, el error e' de la segunda observación será el producto de la suma q más x por un coeficiente determinado, y así sucesivamente. La probabilidad del error e, estando dada por una función conocida, estará expresada por la misma función del primero de los productos precedentes. La probabilidad de e' estará expresada por la misma función del segundo de estos productos, y así con las demás. La probabilidad de la existencia simultánea de los errores e, e', e'', etc., será entonces proporcional al producto de estas diversas funciones, un producto que será una función de x. Concedido esto, si uno concibe una curva cuya abscisa es *x*, y cuya ordenada correspondiente es este producto, esta curva representará la probabilidad de los diversos valores de *x*, cuyos límites estarán determinados por los límites de los errores e, e', e'', etc. Ahora designemos por *X* la abscisa que es necesario elegir; *X* disminuida por *x* será el error que se cometería si la abscisa *x* fuese la corrección verdadera. Este error, multiplicado por la probabilidad de *x* o por la correspondiente ordenada de la curva, será el producto de la pérdida por esta probabilidad, considerando, como uno debería, este error como una pérdida ligada a la elección *X*. Multiplicando este producto por la diferencial de *x*, la integral tomada desde la primera extremidad de la curva hasta *X* será la desventaja de *X* resultante de los valores de *x* inferiores a *X*. Para los valores de *x* superiores a *X*, *x* menos *X* sería el error de *X* si *x* fuese la corrección verdadera; la integral del producto de *x* por la ordenada correspondiente de la curva y por la diferencial de *x* será entonces la desventaja de *X* resultante de los valores *x* superiores a *x*, esta integral estando tomada desde *x* igual a *X* hasta la última extremidad de la curva. Añadiendo esta desventaja a la anterior, la suma será la desventaja ligada a la elección de *X*. Esta elección debe estar determinada por la condición de que esta desventaja sea un *mínimo*, y un cálculo muy simple muestra que para esto *X* debe ser la abscisa cuya ordenada divide a la curva en dos partes iguales, de modo que es probable que el verdadero valor de *x* no caiga ni en uno ni en otro lado de *X*.

Célebres geómetras han elegido para *X* el valor más probable de *x* y consecuentemente aquel que corresponde a la ordenada más grande de la curva; pero el valor anterior me parece evidentemente aquel que señala la teoría de la probabilidad.

CAPÍTULO XVI

ACERCA DE LAS ILUSIONES EN LA ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADES

La mente tiene sus ilusiones como el sentido de la vista [tiene las suyas], y de la misma manera que el sentido del tacto corrige al último, la reflexión y el cálculo corrigen a la primera. La probabilidad basada sobre una experiencia diaria, o exagerada por el miedo y por la esperanza, nos llama más la atención que una probabilidad superior, pero es sólo un simple resultado del cálculo. Así, no tememos, a cambio de pequeñas ventajas, exponer nuestra vida a peligros mucho menos improbables que la extracción de una quinta en la lotería de Francia; y sin embargo, nadie desearía procurarse las mismas ventajas con la certeza de perder su vida si se extrajera esta quinta.

Nuestras pasiones, nuestros prejuicios, y las opiniones dominantes, al exagerar las probabilidades que les son favorables y al atenuar las probabilidades contrarias, son las fuentes abundantes de ilusiones peligrosas.

Los males presentes y la causa que los produjo nos afectan mucho más que el recuerdo de males producidos por la causa contraria; nos impiden apreciar con justicia los inconvenientes de unos y de otros, así como la probabilidad de los medios apropiados para protegernos de ellos. Es esto lo que conduce alternativamente al despotismo y a la anarquía a los pueblos que son expulsados del estado de reposo al que nunca regresan excepto después de largas y crueles agitaciones.

Esta impresión vívida que recibimos de la presencia de eventos, y que apenas nos permite notar los eventos contrarios observados por otros, es una causa principal de error contra la cual uno no puede protegerse lo suficiente.

Es principalmente en los juegos de azar que una multitud de ilusiones respaldan la esperanza y la sostienen contra posibilidades desfavorables. La mayoría de aquellos que juegan a las loterías no saben cuántas posibilidades les son favorables y cuántas les son contrarias. Solamente ven la posibilidad de ganar, por una apuesta pequeña, una suma considerable, y los proyectos paridos por su imaginación exageran a sus ojos la probabilidad de obtenerla. Especialmente el hombre pobre, entusiasmado por el deseo de un mejor destino, arriesga en el juego sus necesidades al aferrarse a las combinaciones más desfavorables que le prometen un gran beneficio. Sin duda todos se sorprenderían del inmenso número de apuestas perdidas si pudieran saber de ellas, pero, por el contrario, se les da a las ganancias una gran publicidad, que se vuelve una nueva causa de entusiasmo para este juego fúnebre.

Cuando en la lotería de Francia no ha salido un número por mucho tiempo, la multitud está ansiosa por abrigarlo con apuestas. Juzgan que, ya que el número no ha salido en mucho tiempo, en la siguiente extracción debe salir con preferencia a otros. Un error tan común me parece descansar sobre una ilusión por la cual uno es involuntariamente llevado de vuelta al origen de los eventos. Es, por ejemplo, muy improbable que en el juego de caras y cruces uno saque caras diez veces en sucesión. Esta improbabilidad, que llama nuestra atención cuando ha sucedido nueve veces, nos lleva a creer que en la décima tirada saldrá cruz. Pero el pasado indicando en la moneda una mayor propensión para caras que para cruces hace al primero de los eventos más probable que el segundo; aumenta mientras uno ha visto la probabilidad de sacar cara en el siguiente lanzamiento. Una ilusión similar persuade a muchas personas a que uno ciertamente puede ganar en una lotería al poner cada vez sobre el mismo número, hasta que salga, una apuesta cuyo producto supera la suma de todas las apuestas. Pero incluso cuando especulaciones similares no se refrenarían por la imposibilidad de sostenerlas, no disminuirían la desventaja matemática de los especuladores y [sí] aumentarían su desventaja moral, pues en cada extracción arriesgarían una parte muy grande de su fortuna.

He visto hombres ardientemente deseosos de tener un hijo que se enteraban sólo con ansiedad de los nacimientos de niños en el mes cuando esperaban volverse padres. Imaginando que la proporción de estos nacimientos con los de niñas debe ser la misma al final de cada mes, juzgaban que los niños ya nacidos harían más probable que los siguientes nacimientos fueran de niñas. Así, la extracción de una bola blanca de una urna que contiene un número limitado de bolas blancas y de bolas negras aumenta la probabilidad de extraer una bola negra en la siguiente extracción. Pero esto deja de tener lugar cuando el número de bolas en la urna es ilimitado, como uno debe suponer para comparar este caso con el de los nacimientos. Si, en el curso de un mes, nacen muchos más niños que niñas, uno podría sospechar que hacia el momento de su concepción una causa general ha favorecido la concepción masculina, lo que haría más probable que el siguiente nacimiento sea de un niño. Los eventos irregulares de la naturaleza no son exactamente comparables con la extracción de los números de una lotería en la que en cada saque se mezclan todos los números de modo tal que las posibilidades de su extracción sean perfectamente iguales. La frecuencia de uno de estos eventos parece indicar una causa que lo favorece ligeramente, que aumenta la probabilidad de su próximo retorno, y su repetición prolongada por mucho tiempo, tal como una larga serie de días lluviosos puede desarrollar causas desconocidas para su cambio; de modo que en cada evento esperado no vamos de vuelta, como en cada extracción de la lotería, al mismo estado de indecisión con respecto a lo que debería suceder. Pero en proporción como se multiplica la observación de estos eventos, la comparación de sus resultados con aquellos de las loterías se vuelve más exacta.

Por una ilusión contraria a las anteriores, uno busca en los sorteos pasados de la lotería de Francia los números que han salido con más frecuencia con el fin de formar combinaciones sobre las que uno piensa poner la apuesta ventajosa. Pero una vez considerada la manera en la que se mezclan los números en esta lotería, el pasado no debería de tener influencia en el futuro. Las extracciones muy frecuentes de un número son solamente anomalías del azar: he sometido varias de ellas al cálculo y constantemente he encontrado que están incluidas dentro de los límites que sin improbabilidad nos permite admitir la suposición de una posibilidad igual de la extracción de todos los números.

En una larga serie de eventos del mismo tipo, las posibilidades individuales del azar deben a veces ofrecer las singulares vetas de buena suerte o mala suerte que la mayoría de los jugadores no dudan en atribuir a una especie de fatalidad. En los juegos que dependen al mismo tiempo del azar y de la competencia de los jugadores sucede a menudo que uno que pierde, agitado por ello, busca reparar su situación con jugadas azarosas que descartaría en otra situación; así, agrava su propia mala suerte y prolonga su duración. Es así que la prudencia se vuelve necesaria, y resulta importante convencerse de que la desventaja moral ligada a las posibilidades desfavorables aumenta por la propia mala suerte.

La opinión de que el hombre ha sido puesto desde hace mucho tiempo en el centro del Universo, considerándose a sí mismo el objeto especial de los cuidados de la naturaleza, lleva a cada individuo a hacerse el centro de una esfera más o menos extendida y a creer que el azar tiene preferencia por él. Sostenidos por esta creencia, los jugadores a menudo arriesgan sumas considerables en juegos aun sabiendo que las posibilidades les son desfavorables. En la conducción de la vida una opinión similar puede a veces tener sus ventajas, pero más a menudo conduce a iniciativas desastrosas. Aquí, como en todos lados, las ilusiones son peligrosas, y sólo la verdad es generalmente útil.

Una de las mayores ventajas del cálculo de probabilidades es que nos enseña a desconfiar de las primeras opiniones. Ya que reconocemos que a menudo engañan cuando pueden ser sometidas al cálculo, debemos concluir que en otros asuntos la confianza debe darse solamente después de una circunspección extrema. Probemos esto con un ejemplo.

Una urna contiene cuatro bolas, negras y blancas, pero no todas del mismo color. Ha sido sacada una de estas bolas cuyo color es blanco y que ha sido devuelta en la urna para proceder a extracciones similares. Se requiere la probabilidad de extraer únicamente bolas negras en las siguientes cuatro extracciones.

Si las [bolas] blancas y negras estuviesen en igual número, esta probabilidad sería la cuarta potencia de la probabilidad $\frac{1}{2}$ de extraer una bola negra en cada extracción; sería entonces $\frac{1}{16}$. Pero la extracción de una bola blanca en la primera extracción indica una superioridad en el número de bolas blancas en la urna; pues si uno supone en la urna tres bolas blancas y una negra, la probabilidad de extraer una bola blanca es $\frac{3}{4}$; es $\frac{2}{4}$ si uno supone dos bolas blancas y dos negras, y finalmente se reduce a $\frac{1}{4}$ si uno supone tres bolas negras y una blanca. Siguiendo el principio de la probabilidad de causas trazadas desde eventos, las probabilidades de estas tres suposiciones son entre sí como las cantidades $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$; son consecuentemente iguales a $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$. Es entonces una apuesta de 5 contra 1 que el número de bolas negras sea inferior, o a lo mucho igual, al de las blancas. Parece pues que, después de la extracción de una bola blanca en la primera extracción, la probabilidad de extraer sucesivamente cuatro bolas negras debe ser menor que en el caso de la igualdad de los colores o menor que una dieciseisava [parte]. Sin embargo, no lo es, y por un cálculo muy simple se descubre que esta probabilidad es mayor que una catorceava [parte]. En efecto, sería la cuarta potencia de $\frac{1}{4}$, de $\frac{2}{4}$, y de $\frac{3}{4}$ en la primera, la segunda, y la tercera de las suposiciones anteriores concerniendo los colores de las bolas en la urna. Multiplicando respectivamente cada potencia por la probabilidad de la suposición correspondiente, o por $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, y $\frac{1}{6}$, la suma de los productos será la probabilidad de extraer sucesivamente cuatro bolas negras. Uno tiene así, para esta probabilidad, $\frac{29}{384}$, una fracción mayor que $\frac{1}{14}$. Esta paradoja se explica al considerar que la indicación de la superioridad de bolas blancas sobre las negras en la primera extracción no excluye en absoluto la superioridad de las bolas negras sobre las blancas, una superioridad que excluye la suposición de la igualdad de los colores. Pero esta superioridad, aunque ligeramente probable, debe hacer la probabilidad de sacar sucesivamente un número dado de bolas negras mayor que en esta suposición si el número es considerable; y recién hemos visto que esto comienza cuando el número dado es igual a cuatro. Consideremos, una vez más, una urna que contiene varias bolas blancas y negras. Supongamos primero que solamente hay una bola blanca y una negra. Es entonces una apuesta nivelada que se extraerá una bola blanca en una extracción. Pero parece entonces que, para la igualdad de la apuesta, aquel que apuesta a extraer la bola blanca debe tener dos extracciones si la urna contiene dos negras y una blanca; tres extracciones si contiene tres negras y una blanca, y así sucesivamente. (Se ha supuesto que después de cada extracción la bola extraída es puesta de nuevo en la urna.)

Fácilmente nos convencemos de que esta primera idea es errónea. En efecto, en el caso de dos bolas negras y una blanca, la probabilidad de extraer dos negras en dos extracciones es la segunda potencia de $\frac{2}{3}$ o $\frac{4}{9}$; pero esta probabilidad, añadida a la de sacar una bola blanca en dos extracciones, es la certeza o la unidad, ya que es certero que deben salir dos bolas negras o al menos una bola blanca; la probabilidad en este último caso es entonces $\frac{5}{9}$, una fracción mayor que $\frac{1}{2}$. Habría todavía una mayor ventaja en la apuesta de sacar una bola blanca en cinco extracciones si la urna contuviese cinco bolas negras y una blanca; esta apuesta es todavía más ventajosa para cuatro extracciones, y se asemeja a la de sacar un seis en cuatro lanzamientos con un solo dado.

El Chevalier de Méré, quien causó la invención del cálculo de probabilidades al alentar a su amigo Pascal, el gran geómetra, a ocuparse en él, le dijo “que había encontrado un error en los números por esta proporción. Si nos comprometemos a sacar seis con un dado, hay una ventaja en comprometerse con cuatro lanzamientos, como 671 a 625. Si nos comprometemos a sacar dos seises con dos dados, hay una desventaja en comprometerse con 24 lanzamientos. Al menos 24 es a 36, el número de las caras de los dos dados, como 4 es a 6, el número de caras de un dado." "Este fue", escribió Pascal a Fermat, "su gran escándalo, que le llevó a decir valientemente que las proposiciones[2] no eran constantes y que la aritmética era demente […]. Tiene una gran mente, pero no es un geómetra, lo que es, como sabes, una gran falla." El Chevalier de Méré, engañado por una analogía falsa, pensó que en el caso de la igualdad de apuestas el número de lanzamientos debería incrementar en proporción al número de todas las chances posibles, lo que no es exacto, pero que se aproxima a la exactitud a medida que este número se hace mayor.

Uno ha tratado de explicar la superioridad de los nacimientos de niños sobre los de niñas por el deseo general de los padres de tener un hijo que perpetúe su apellido. Así, al imaginar una urna llenada de una infinidad de bolas blancas y negras en igual número, y suponiendo a un gran número de personas cada una de las cuales saca una bola de esta urna y continúa con la intención de detenerse hasta haber sacado una bola blanca, uno ha creído que esta intención debe hacer que el número de bolas blancas extraídas sea superior al de las negras. En realidad, esta intención da necesariamente, después de todas las extracciones, un número de bolas blancas igual al de las personas, y es posible que estas extracciones nunca conduzcan a una bola negra. Pero es fácil ver que esta primera noción es solamente una ilusión, pues si uno concibe que en la primera extracción todas las personas sacan a la vez una bola de la urna, es evidente que su intención no puede tener influencia sobre el color de las bolas que deben aparecer en esta extracción. Su único efecto será el de excluir de la segunda extracción a las personas que hayan sacado una bola blanca en la primera. Es igualmente evidente que la intención de las personas que participen en la nueva extracción no tendrá ninguna influencia sobre el color de las bolas que sean sacadas, y que será lo mismo en las siguientes extracciones. Esta intención no tendrá, entonces, ninguna influencia sobre el color de las bolas extraídas en la totalidad de las extracciones; sí causará, no obstante, que participen más o menos personas en cada extracción. La

[2] Probablemente lo que escribió Pascal fue "proporciones", y no "proposiciones". Empero, en los textos consultados se lee invariablemente "proposiciones". Nota del Traductor.

proporción de las bolas blancas extraídas a las negras diferirá, así, muy poco de la unidad. Se sigue que, el número de personas estando supuesto a ser muy grande, si la observación da entre los colores extraídos una proporción que difiere sensiblemente de la unidad, es muy probable que la misma diferencia se encuentre entre la unidad y la proporción de las bolas blancas a las negras contenidas en la urna.

Cuento entre las ilusiones la aplicación que Leibniz y Daniel Bernoulli han hecho del cálculo de probabilidades a la suma de series. Si uno reduce la fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la unidad más una variable en una serie prescrita por la proporción a las potencias de esta variable, es fácil ver que, al suponer la variable igual a la unidad, la fracción se vuelve $\frac{1}{2}$, y la serie se vuelve más uno, menos uno, más uno, menos uno, etc. Al añadir los primeros dos términos, los segundos dos, y así sucesivamente, la serie se transforma en otra de la cual cada término es cero. Grandi, un jesuita italiano, concluyó de esto la posibilidad de la creación; porque la serie comienza siempre con $\frac{1}{2}$, vio a esta fracción surgir desde una infinidad de ceros o desde nada. Fue así que Leibniz creyó haber visto la imagen de la creación en su aritmética binaria, donde empleó solamente los dos caracteres, la unidad y el cero. Imaginó que, ya que Dios puede ser representado por la unidad y la nada por cero, el Ser Supremo puede sacar desde la nada a todos los seres, como la unidad con el cero expresa todos los números en este sistema de aritmética. Esta idea le resultó tan placentera que se la comunicó al jesuita Grimaldi, presidente del tribunal de matemáticas en China, con la esperanza de que este emblema de la creación convirtiera al cristianismo al emperador, quien amaba particularmente las ciencias. Reporto este incidente solamente para mostrar hasta qué extensión los prejuicios de la infancia pueden engañar a los más grandes hombres.

Leibniz, siempre conducido por una singular y muy floja metafísica, consideró que la serie más uno, menos uno, más uno, etc., se vuelve unidad o cero dependiendo de si uno se detiene en un número de términos non o par, y como en el infinito no hay razón para preferir uno a otro, siguiendo las reglas de la probabilidad uno debe tomar la mitad de los resultados relativos a estos dos tipos de números, que son cero y la unidad, lo que da $\frac{1}{2}$ para el valor de la serie. Daniel Bernoulli ha extendido este razonamiento a la suma de series formadas por términos periódicos. Pero todas estas series no tienen valores propiamente hablando; los obtienen sólo cuando sus términos sean multiplicados por las potencias sucesivas de una variable menor que la unidad. Entonces estas series siempre son convergentes, sin importar qué tan pequeña se suponga la diferencia de la variable desde la unidad; y es fácil demostrar que los valores asignados por Bernoulli, en virtud de la regla de probabilidades, son los mismos valores de la fracción generatriz de las series cuando en estas fracciones uno supone la variable igual a la unidad. Estos valores son, una vez más, los límites a los que las series se aproximan cada vez más a medida que la variable se acerca a la unidad. Pero cuando la variable es exactamente igual a la unidad, las series dejan de ser convergentes; tienen valores sólo en la medida en que uno los arreste. La notable razón [proporción] de esta aplicación del cálculo de probabilidades con los límites de los valores de series periódicas supone que los términos de estas series son multiplicados por todas las potencias consecutivas de la variable. Pero esta serie puede resultar del desarrollo de una infinidad de distintas fracciones en las que esto no ocurrió. Así, la serie más uno, menos uno, más uno, etc., puede surgir del desarrollo de una fracción cuyo numerador sea la unidad más la variable y cuyo denominador sea este numerador aumentado por el cuadrado de la variable. Suponiendo la variable igual a la unidad, este desarrollo cambia en la serie propuesta, y la fracción generatriz se vuelve igual a $\frac{2}{8}$; las reglas de probabilidades darían entonces un resultado falso, lo que muestra el peligro que supondría emplear un razonamiento similar especialmente en las ciencias matemáticas, que deben distinguirse por el rigor de sus operaciones.

Llegamos naturalmente a creer que el orden de acuerdo con el cual vemos las cosas renovarse en la Tierra ha existido desde siempre y continuará siendo así. Ciertamente, si el estado actual del universo fuese exactamente similar al estado anterior que lo ha producido, daría lugar, a su vez, a un estado similar, y la sucesión sería entonces eterna. Aplicando el análisis a la ley de gravitación universal he encontrado que el movimiento de rotación y de revolución de los planetas y los satélites, así como la posición de las órbitas y de sus ecuadores, están sujetos sólo a desigualdades periódicas. Al comparar con los antiguos eclipses la teoría de la ecuación secular de la luna he descubierto que, desde Hiparco, la duración del día no ha variado por la centésima de un segundo, y que la temperatura media de la Tierra no ha disminuido la centésima de un grado. Así, la estabilidad del orden actual parece establecida al mismo tiempo por la teoría y las observaciones. Pero este orden se efectúa por diversas causas reveladas por un examen atento, y que es imposible someter al cálculo.

Las acciones del océano, de la atmósfera y de los meteoros, de los terremotos, y de la erupción de los volcanes, agitan continuamente la superficie de la Tierra y deben efectuar, a la larga, grandes cambios. La temperatura de los climas, el volumen de la atmósfera, y la proporción de los gases que la constituyen, pueden variar de un modo inapreciable. Siendo nuevos los instrumentos y los medios apropiados para determinar estas variaciones, hasta este momento la observación ha sido incapaz de enseñarnos algo en este aspecto. Pero es poco probable que las causas que absorben y renuevan los gases constituyendo al aire mantengan exactamente sus respectivas proporciones. Una larga serie de siglos mostrará las alteraciones experimentadas por todos estos elementos, tan esenciales para la conservación de los seres organizados. Aunque los monumentos históricos no se remontan a una gran antigüedad, nos dan muestra de cambios suficientemente grandes que han tenido lugar por la acción lenta y continua de los agentes naturales. Buscando en las entrañas de la Tierra uno encuentra numerosos escombros de la primera naturaleza, completamente distintos de los actuales. Por otra parte, si toda la Tierra era líquida al principio, como todo parece indicar, uno imagina que al pasar de tal estado al actual su superficie debió haber experimentado cambios prodigiosos. El propio cielo, a pesar del orden de sus movimientos, no es inmutable. La resistencia de la luz y de otros fluidos etéreos, así como la atracción de las estrellas deben alterar considerablemente, después de un gran número de siglos, los movimientos planetarios. Las variaciones ya observadas en las estrellas y en la forma de las nebulosas nos dan un presentimiento de aquellas [variaciones] que desarrollará el tiempo en el sistema de estos grandes cuerpos. Uno puede representar los sucesivos estados del universo con una curva de la cual el tiempo sería la abscisa y las ordenadas los diversos estados. Apenas conociendo un elemento de esta curva, estamos lejos de poder regresar a su origen, y si para satisfacer a la imaginación, siempre inquieta ante nuestra ignorancia de la causa de los fenómenos que le interesan, uno aventura algunas conjeturas, es sabio presentarlas con una reserva extrema.

En la estimación de probabilidades existe un tipo de ilusiones que, dependiendo especialmente de las leyes de la organización intelectual, demanda, con el fin de defenderse contra ellas, un examen profundo de estas leyes. El deseo de penetrar en el futuro, y las proporciones de algunos eventos notables con las predicciones de los astrólogos, los adivinos y los adivinadores, con los presentimientos y los sueños, con los números y los días reputados como afortunados o desafortunados, han dado lugar a una multitud de prejuicios todavía muy extendidos. Uno no reflexiona sobre el número de no-coincidencias que no han hecho ninguna impresión o que son desconocidas. Sin embargo, es necesario estar familiarizado con ellas para apreciar la probabilidad de las causas a las que se atribuyen las coincidencias. Este conocimiento confirmaría, sin duda, aquello que nos dicta la razón con respecto a estos prejuicios. Así, el filósofo de la antigüedad al que en un templo se le muestra, con el fin de exaltar el poder del dios ahí adorado, el *ex veto* de todos aquellos que después de haberlo invocado se salvaron de la catástrofe, presenta un incidente consonante con el cálculo de probabilidades, observando que no ve inscritos los nombres de aquellos que, a pesar de su invocación, han perecido. Cicerón ha refutado todos estos prejuicios con mucha razón y elocuencia en su *De divinatione*, que termina con un pasaje que citaré aquí;[3] pues uno adora encontrar una vez más, entre los antiguos, los rayos de la razón que, después de haber disipado todos los prejuicios por su luz, deben convertirse en el único fundamento de las instituciones humanas.

"Es necesario", dice el orador romano, "rechazar la adivinación por los sueños y por todos los prejuicios similares. La superstición generalizada ha subyugado a la mayoría de las mentes y ha tomado posesión de la debilidad de los hombres. Es esto lo que hemos expuesto en nuestros libros sobre la naturaleza de los dioses, y especialmente en este trabajo, persuadidos de que prestaremos un servicio a otros y a nosotros si conseguimos destruir la superstición. No obstante (y deseo que especialmente en este aspecto sea bien comprendido mi pensamiento), al destruir la superstición estoy lejos de querer perturbar la religión. La sabiduría se nos une para mantener las instituciones y las ceremonias de nuestros ancestros, tocando el culto de los dioses. Más aún, la belleza del universo y el orden de las cosas celestiales nos fuerzan a reconocer alguna naturaleza superior que debe ser notada y admirada por la raza humana. Pero en la medida en que es apropiado propagar

[3] La traducción del pasaje es mía. Nota del Traductor.

la religión, que está ligada con el conocimiento de la naturaleza, es necesario promover la extirpación de la superstición, pues ésta atormenta a uno, importuna a uno, y lo persigue continuamente y en todo lugar. Si uno consulta a un adivino o a un adivinador, si uno inmola a una víctima, si uno considera el vuelo de un pájaro, si relampaguea, si truena, si hay rayos, finalmente, si hay nacidos o se manifiesta un tipo de prodigio, cosas una de las cuales debe suceder a menudo, entonces domina la superstición y no deja reposo. El propio sueño, refugio de los mortales en sus problemas y sus labores, se convierte por ella en una nueva fuente de inquietud y miedo.”

Todos estos prejuicios y los terrores que inspiran están conectados con causas psicológicas que a veces continúan operando fuertemente, incluso después de que la razón se haya desengañado de ellas. Pero la repetición de actos contrarios a estos prejuicios siempre puede destruirlos.

CAPÍTULO XVII

SOBRE LOS DIVERSOS MEDIOS DE ACERCARSE A LA CERTEZA

La inducción, la analogía, las hipótesis fundadas sobre hechos y continuamente rectificadas por nuevas observaciones, un feliz tacto ofrecido por la naturaleza y fortalecido por numerosas comparaciones de sus indicaciones con la experiencia; tales son los principales medios para llegar a la verdad.

Si uno considera una serie de objetos de la misma naturaleza, percibe entre ellos y en sus cambios razones que se manifiestan cada vez más a medida que la serie se prolonga, y que, extendiéndose y generalizándose continuamente, conducen finalmente al principio del cual fueron derivadas. Pero estas razones están envueltas por tantas circunstancias extrañas que se requiere de una gran sagacidad para desenmarañarlas y para recurrir a este principio; en esto consiste el verdadero genio de las ciencias. El análisis y la filosofía natural deben sus descubrimientos más importantes a este fructífero medio, llamado *inducción*. Newton estaba en deuda con él por su teorema del binomio y el principio de gravitación universal. Resulta difícil apreciar la probabilidad de los resultados de la inducción, que está basada en que las razones más simples son las más comunes; esto se verifica en las fórmulas del análisis y se encuentra de nuevo en los fenómenos naturales, en la cristalización, y en las combinaciones químicas. Esta simplicidad de las razones no resulta sorprendente si consideramos que todos los efectos de la naturaleza son solamente resultados matemáticos de un pequeño número de leyes inmutables.

Con todo, la inducción, al llevar al descubrimiento de los principios generales de las ciencias, no basta para establecerlos de modo absoluto. Siempre es necesario confirmarlos por demostraciones o por experimentos decisivos, pues la historia de las ciencias nos muestra que a veces la inducción ha llevado a resultados inexactos. Citaré, por ejemplo, un teorema de Fermat con respecto a los números primos. Este gran geómetra, quien había meditado profundamente sobre este teorema, buscó una fórmula que, conteniendo únicamente números primos, diera directamente un número primo mayor que cualquier otro número asignable. La inducción lo llevó a pensar que dos, elevado a una potencia que fuese ella misma una potencia de dos, formaba con la unidad un número primo. Así, dos elevado al cuadrado más uno, forma el número primo cinco; dos elevado a la segunda potencia de dos, o dieciséis, forma con uno el número primo diecisiete. Descubrió que esto seguía siendo cierto para la octava y la dieciseisava potencia de dos aumentada por la unidad, y esta inducción, basada en diversas consideraciones aritméticas, causó que considerara a este resultado como general. Sin embargo, confesó no haberlo demostrado. En efecto, Euler reconoció que no vale para la trigésimo segunda potencia de dos, que, aumentada por la unidad, da 4, 294, 967, 297, un número divisible entre 641.

Por la inducción juzgamos que si varios eventos, movimientos, por ejemplo, aparecen constantemente y siempre han estado conectados por una razón simple, seguirán estando sujetos a ella; y de esto concluimos, por la teoría de las probabilidades, que esta razón no se debe al azar, sino a una causa regular. Así, la igualdad de los movimientos de rotación y de revolución de la luna; la de los movimientos de los nodos de la órbita y del ecuador lunar, así como la coincidencia de estos nodos; la proporción singular de los movimientos de los tres primeros satélites de Júpiter, de acuerdo con la cual la longitud media del primer satélite, menos tres veces la del segundo, más dos veces la del tercero, es igual a dos ángulos rectos; la igualdad del intervalo de las mareas con el del paso de la luna al meridiano; el retorno de las mayores mareas con las sizigias y de las menores con las cuadraturas; todas estas cosas, que se han mantenido desde que fueron observadas por primera vez, indican con una probabilidad extrema la existencia de causas constantes que los geómetras felizmente han vinculado con la ley de gravitación universal, y que su conocimiento hace cierta la perpetuidad de estas razones.

El canciller Bacon, el elocuente promotor del verdadero método filosófico, ha hecho un mal uso muy extraño de la inducción con el fin de probar la inmovilidad de la Tierra. Así razona en el *Novum Organum*, su mejor trabajo: “El movimiento de las estrellas desde el oriente al occidente aumenta en rapidez en proporción con su distancia desde la Tierra. Este movimiento es más rápido con las estrellas; se reduce un poco con Saturno, un poco más con Júpiter, y así hasta la luna y los cometas más grandes. Sigue siendo perceptible en la atmósfera, especialmente entre los trópicos, a causa de los grandes círculos que ahí describen las moléculas del aire; finalmente, es casi inapreciable con el océano, y es entonces nulo para la Tierra.” Pero esta inducción solamente prueba que Saturno, y las estrellas que son inferiores a él, tienen sus propios movimientos, contrarios al movimiento real o aparente que barre toda la esfera celeste desde el oriente al occidente, y que estos movimientos parecen más lentos con las estrellas más remotas, lo que es conforme con las leyes de la óptica. Bacon debió haberse impresionado por la inconcebible rapidez que requieren las estrellas para completar su revolución diurna, si la Tierra es inmóvil, y por la extrema simplicidad con la que su rotación explica cómo cuerpos tan distantes entre sí, como las estrellas, el sol, los planetas, y la luna, parecen todos estar sujetos a esta revolución. En cuanto al océano y la atmósfera, no debió comparar su movimiento con el de las estrellas que están separadas de la Tierra, pero como el aire y el mar forman parte del globo terrestre, debían participar en su movimiento o en su reposo. Es llamativo que Bacon no fuese conquistado por la majestuosa idea que del universo ofrece el sistema copernicano. A favor de tal sistema sí pudo encontrar, empero, fuertes analogías en los descubrimientos de Galileo, a los que dio continuidad. Ha ofrecido el precepto para buscar la verdad, pero no el ejemplo. Pero al insistir, con toda la fuerza de la razón y la elocuencia, en la necesidad de abandonar las insignificantes sutilezas de la escuela para aplicarse uno mismo en las observaciones y las experiencias, y al señalar el verdadero método para llegar a las causas generales de los fenómenos, este gran filósofo contribuyó a las inmensas zancadas que hizo la mente humana en el magnífico siglo en el que terminó su carrera.

La analogía está basada sobre la probabilidad de que cosas similares tienen causas del mismo tipo y producen los mismos efectos. Esta probabilidad aumenta a medida que la similitud se hace más perfecta. Así, juzgamos sin duda que seres provistos de los mismos órganos, haciendo las mismas cosas, experimentan las mismas sensaciones y se mueven por los mismos deseos. La probabilidad de que los animales que se nos asemejan tengan sensaciones análogas a las nuestras, aunque un poco inferior a la [probabilidad] relativa a individuos de nuestra especie, todavía es muy grande; y se ha necesitado de toda la influencia de los prejuicios religiosos para hacernos pensar, junto con algunos filósofos, que los animales son meros autómatas. La probabilidad de la existencia de sensación decrece en la misma proporción a medida que disminuye la similitud de los órganos con los nuestros, pero siempre es muy grande, incluso con los insectos. Al ver que aquellos de la misma especie ejecutan cosas muy complicadas exactamente de la misma forma de generación a generación, y sin haberlas aprendido, uno llega a creer que actúan por una especie de afinidad análoga a la que une las moléculas de los cristales, pero que, junto con la sensación ligada a toda organización animal, produce, con la regularidad de combinaciones químicas, combinaciones que son mucho más singulares; quizá uno podría llamar *afinidad animal* a esta mezcla de afinidades y sensaciones electivas. Aunque existe una gran analogía entre la organización de las plantas y la de los animales, no me parece suficiente [razón] para extender a los vegetales el sentido de la sensación; pero nada nos autoriza a negárselo.

Dado que el Sol da a luz, por la benéfica acción de su luz y de su calor, a los animales y a las plantas que cubren la Tierra, por analogía juzgamos que produce efectos similares en los otros planetas; pues no es natural pensar que la causa cuya actividad vemos desarrollarse de tantas maneras sea estéril sobre un planeta tan grande como Júpiter, que, al igual que el globo terrestre, tiene sus días, sus noches, y sus años, y cuyas observaciones indican cambios que suponen fuerzas muy activas. Empero, equivaldría a extender mucho la analogía el concluir de ella la similitud de los habitantes de los planetas y de la Tierra. El hombre, hecho para la temperatura que goza, y para el elemento que respira, no sería capaz, de acuerdo con toda apariencia, de vivir en otros planetas. Pero, ¿no debería haber una infinidad de organización relativa a las diversas constituciones de los globos de este universo? Si la única diferencia de los elementos y de los climas produce tanta variedad en producciones terrestres, ¡cuánto mayor debería de ser la diferencia entre aquellas [producciones] de los diversos planetas y de sus satélites! Ni siquiera la imaginación más activa puede formarse una idea, pero su existencia es muy probable.

Por una fuerte analogía llegamos a considerar las estrellas como tantos soles dotados, como el nuestro, de un poder atractivo proporcional a la masa y recíproco al cuadrado de las distancias; pues este poder estando demostrado para todos los cuerpos del sistema solar, y para sus moléculas más pequeñas, parece pertenecer a toda la materia. Ya los movimientos de las estrellas pequeñas, que han sido llamadas *dobles* a cuenta de su conjunción, parecen indicarlo. A lo mucho un siglo de observaciones precisas, verificando sus movimientos de revolución entre sí, pondrá fuera de toda duda sus atracciones recíprocas.

La analogía que nos lleva a hacer de cada estrella el centro de un sistema planetario es mucho menos fuerte que la anterior, pero adquiere probabilidad por la hipótesis que se ha propuesto con respecto a la formación de las estrellas y del sol; pues en esta hipótesis cada estrella, habiendo sido como el sol, cercada originalmente por una vasta atmósfera, es natural atribuir a esta atmósfera los mismos efectos que a la atmósfera solar, y suponer que ha producido, al condensarse, planetas y satélites.

En las ciencias, un gran número de descubrimientos se debe a la analogía. Citaré como uno de los más notables el descubrimiento de la electricidad atmosférica, a la que se ha llegado por la analogía de fenómenos eléctricos con los efectos del trueno.

El método más seguro para guiarnos en la búsqueda de la verdad consiste en ascender, por inducción, desde fenómenos a leyes y desde leyes a fuerzas. Las leyes son las razones que conectan entre sí fenómenos particulares: cuando han mostrado el principio general de las fuerzas de las que derivan, uno verifica, ya sea por experiencias directas (cuando sea posible) o por examinación, si concuerda con fenómenos conocidos; y si por un análisis riguroso vemos que proceden de este principio, incluso en sus detalles pequeños, y si, más todavía, son muy variadas y numerosas, entonces la ciencia adquiere el mayor grado de certeza y de perfección al que puede aspirar. Así se ha vuelto la astronomía por el descubrimiento de la gravitación universal. La historia de las ciencias muestra que el lento y laborioso camino de la inducción no siempre ha sido el de los inventores. La imaginación, impaciente por llegar a las causas, se complace en crear hipótesis, y a menudo modifica los hechos con el propósito de adaptarlos a su obra; entonces las hipótesis son peligrosas. Pero cuando uno las considera solamente como el medio para conectar los fenómenos para así descubrir las leyes, cuando, al rehusarse a atribuirlas a una realidad, uno las rectifica continuamente por nuevas observaciones, pueden llevar a las causas verdaderas, o al menos a ponernos en posición de concluir, desde los fenómenos observados, aquellos que ciertas circunstancias deberían producir.

Si probásemos todas las hipótesis que pueden formarse con respecto a la causa de los fenómenos, llegaríamos, por un proceso de exclusión, a la verdadera. Este medio ha sido empleado con éxito; a veces hemos llegado a varias hipótesis que explican igualmente bien todos los hechos conocidos, y ante las cuales los estudiosos están divididos hasta que observaciones decisivas han hecho conocer la verdadera. Entonces resulta interesante, para la historia de la mente humana, regresar a estas hipótesis para ver cómo han conseguido explicar un gran número de hechos, y para investigar los cambios que debieron padecer para concordar con la historia de la naturaleza. Es así que el sistema de Ptolomeo, que es solamente la realización de apariciones celestes, se transforma en la hipótesis del movimiento de los planetas alrededor del sol al hacer iguales y paralelos a la órbita solar los círculos y los epiciclos que describe anualmente, y cuya magnitud que deja indeterminada. Basta entonces, con el fin de transformar esta hipótesis en el sistema verdadero del mundo, con transportar el movimiento aparente del sol en un sentido contrario al de la Tierra.

Casi siempre es imposible someter al cálculo la probabilidad de los resultados obtenidos por estos diversos medios; esto es igualmente cierto para los hechos históricos. Pero la totalidad de los fenómenos explicados, o de los testimonios, es a veces tal que, sin ser capaces de apreciar la probabilidad, no podemos dudar razonablemente de ellos. En los otros casos es prudente admitirlos sólo con gran reserva.

CAPÍTULO XVIII

NOTA HISTÓRICA SOBRE EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Hace mucho tiempo que en los juegos más simples se determinaron las proporciones de las posibilidades que son favorables o desfavorables para los jugadores, y las apuestas se regularon de acuerdo con estas proporciones. Pero nadie antes de Pascal y Fermat había ofrecido los principios y los métodos para someter este asunto al cálculo, y nadie había resuelto las complicadísimas cuestiones de este tipo. Es, entonces, a estos dos grandes geómetras que debemos referir los primeros elementos de la ciencia de las probabilidades, cuyo descubrimiento puede clasificarse entre las cosas notables que han hecho ilustre al siglo diecisiete, el siglo que ha hecho el mayor honor a la mente humana. El principal problema que resolvieron por distintos métodos consiste, como ya vimos, en distribuir equitativamente la apuesta entre los jugadores, quienes se supone que son igualmente hábiles y concuerdan en detener el juego antes de que termine si la condición del juego es que, para ganarlo, uno debe obtener un número dado de puntos distinto para cada uno de los jugadores. Es claro que la distribución debe hacerse proporcionalmente a las respectivas probabilidades de los jugadores de ganar el juego, las probabilidades dependiendo del número de puntos que todavía falten. El método de Pascal es muy ingenioso, y en el fondo es solamente la ecuación de diferencias parciales de este problema aplicada a determinar las sucesivas probabilidades de los jugadores yendo de los números más pequeños a los siguientes. Este método está limitado al caso de dos jugadores; el de Fermat, basado en combinaciones, aplica a cualquier número de jugadores. Pascal creyó en un principio que estaba, como el suyo, restringido a dos jugadores, y esto produjo entre ellos una discusión al final de la cual Pascal reconoció la generalidad del método de Fermat.

Huygens compiló los diversos problemas que ya habían sido resueltos y añadió algunos nuevos en un pequeño tratado, el primero que ha aparecido sobre este tema y que tiene por título *De Ratiociniis in ludo aleae*. Desde entonces, varios geómetras se han ocupado de este tema: Hudde, el gran pensionario, Witt en Holanda, y Halley en Inglaterra, aplicaron el cálculo a las probabilidades de la vida humana, y Halley publicó la primera tabla de mortalidad en este campo. Casi al mismo tiempo Jacques Bernoulli propuso a los geómetras varios problemas de probabilidad de los que ofreció soluciones posteriormente. Finalmente compuso su bello trabajo titulado *Ars conjectandi*, que apareció siete años después de su muerte, ocurrida en 1706. La ciencia de las probabilidades es investigada con más profundidad en este trabajo que en el de Huygens. El autor propone una teoría general de combinaciones y series, y la aplica a diversas cuestiones difíciles concernientes al azar. Este trabajo sigue siendo notable a cuenta de la justicia y la inteligencia de vista, el empleo de la fórmula del binomio en este tipo de cuestiones, y por la demostración de este teorema, a saber, que al multiplicar indefinidamente las observaciones y las experiencias, la proporción de los eventos de distintas naturalezas se aproxima a la de sus respectivas probabilidades en los límites cuyo intervalo se estrecha cada vez más en la proporción en que se multiplican y se vuelve menor que cualquier cantidad asignable. Este teorema resulta muy útil para obtener, por observaciones, las leyes y las causas de los fenómenos. Bernoulli concede una gran importancia, con razón, a su demostración, sobre la que ha dicho haber meditado por veinte años.

En el intervalo, desde la muerte de Jacques Bernoulli hasta la publicación de su trabajo, Montmort y Moivre produjeron dos tratados sobre el cálculo de probabilidades. El de Montmort tiene por título *Essai sur les Jeux de hasard*, y contiene numerosas aplicaciones de este cálculo a varios juegos. En la segunda edición el autor ha añadido algunas cartas en las que Nicolas Bernoulli propone ingeniosas soluciones para varios problemas difíciles. El tratado de Moivre, posterior al de Montmort, apareció primeramente en las *Transactions philosophiques* del año de 1711. Después el autor lo publicó por separado, y lo ha mejorado sucesivamente en tres ediciones. Este trabajo está basado principalmente en la fórmula del binomio, y los problemas que contiene poseen, al igual que sus soluciones, una gran generalidad. Pero su característica distintiva es la teoría de series recurrentes y su uso en este tema. Esta teoría es la integración de ecuaciones lineales de diferencias finitas con coeficientes constantes, que Moivre llevó a cabo de un modo muy satisfactorio.

En este trabajo, Moivre ha retomado la teoría de Jacques Bernoulli con respecto a la probabilidad de resultados determinados por un gran número de observaciones. No se contenta con mostrar, como sí lo hace Bernoulli, que la proporción de los eventos que deben ocurrir se aproxima sin cesar a la de sus respectivas probabilidades, sino que ofrece, además, una expresión simple y elegante de la probabilidad de que la diferencia de estas dos proporciones esté contenida dentro de límites dados. Para este propósito determina la proporción del término mayor del desarrollo de una potencia muy grande del binomio a la suma de todos sus términos, y el logaritmo hiperbólico del excedente de este término por encima de los términos adyacentes a él.

Siendo el término mayor el producto de un número considerable de factores, su cálculo numérico resulta impracticable. Con el fin de obtenerlo por una aproximación convergente, Moivre hace uso de un teorema de Stirling respecto al término medio del binomio elevado a una potencia grande, un teorema notable especialmente en esto: que introduce la raíz cuadrada de la proporción de la circunferencia al radio en una expresión que parecería ser irrelevante para este trascendente. Por otra parte, Moivre estuvo enormemente impresionado por este resultado, que Stirling había deducido de la expresión de la circunferencia en productos infinitos; Wallis había llegado a esta expresión por un análisis singular que contiene el germen de la muy curiosa y útil teoría de las integrales definidas.

Muchos estudiosos, de entre los que deberíamos nombrar a Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Messene, Moheau, Price, Bailey, y Duvillard, han coleccionado una gran cantidad de datos precisos con respecto a la población, los nacimientos, los matrimonios, y la mortalidad. Han ofrecido fórmulas y tablas relativas a rentas vitalicias, tontinas, garantías, etc. Pero en esta breve nota sólo puedo indicar estas obras útiles con el propósito de adherirse a las ideas originales. De este número una mención especial se debe a las esperanzas matemática y moral y a al ingenioso principio que Daniel Bernoulli ha suministrado para someter la última al análisis. Tal es, una vez más, la afortunada aplicación que ha hecho del cálculo de probabilidades a la inoculación. Uno debería incluir especialmente, en el número de estas ideas originales, la consideración directa de la posibilidad de los eventos trazados desde eventos observados. Tanto Jacques Bernoulli como Moivre supusieron estas posibilidades como conocidas, y buscaron la probabilidad de que el resultado de experiencias futuras esté cada vez más cerca de representarlas. Bayes, en las *Transactions philosophiques* del año de 1763, buscó directamente la probabilidad de que las posibilidades indicadas por experiencias pasadas estuviesen comprendidas dentro de límites dados, y ha llegado a este resultado de un modo refinado y muy ingenioso, aunque un poco confuso. Este tema está conectado con la teoría de la probabilidad de las causas y de los eventos futuros concluidos desde eventos observados. Algunos años después expuse los principios de esta teoría con una observación en cuanto a la influencia de las desigualdades que pueden existir entre las posibilidades que están supuestas a ser iguales. Aunque no se sabe a cuál de estos eventos simples favorecen estas desigualdades, esta ignorancia suele incrementar la probabilidad de eventos compuestos.

Al generalizar el análisis y los problemas concernientes a las probabilidades, llegué al cálculo de las diferencias finitas parciales que desde entonces Lagrange ha tratado por un método muy simple, y cuyas elegantes aplicaciones ha utilizado en este tipo de problemas. La teoría de funciones generatrices que publiqué casi al mismo tiempo incluye estos temas entre aquellos que abarca, y está adaptada, con la mayor generalidad, a las cuestiones más difíciles de la probabilidad. Determina una vez más, por aproximaciones muy convergentes, los valores de las funciones compuestas de un gran número de términos y factores; y al mostrar que la raíz cuadrada de la proporción de la circunferencia al radio entra muy frecuentemente en estos valores, muestra que puede introducirse una infinidad de otros trascendentes.

Los testimonios, los votos, y las decisiones de asambleas electorales y deliberativas, así como los juicios de los tribunales, han sido igualmente sometidos al cálculo de probabilidades. Tantas pasiones, intereses diversos, y circunstancias complican las cuestiones relativas a los asuntos, que casi siempre son irresolubles. Pero la solución de problemas muy simples que guardan una gran analogía con ellos a menudo puede arrojar mucha luz sobre cuestiones difíciles e importantes, que la garantía del cálculo hace siempre preferible a los razonamientos más especiosos.

Una de las aplicaciones más interesantes del cálculo de probabilidades concierne a los valores medios que deben elegirse entre los resultados de las observaciones. Muchos geómetras han estudiado el tema, y Lagrange ha publicado en las *Memoires de Turin* un precioso método para determinar estos valores medios una vez conocida la ley de los errores de las observaciones. Para el mismo propósito he suministrado un método basado en una singular estratagema que puede emplearse ventajosamente en otras cuestiones del análisis; y éste, al permitir una extensión indefinida en todo el curso de un cálculo extenso de las funciones que habrían de estar limitadas por la naturaleza del problema, señala las modificaciones que cada término del resultado final habría de recibir en virtud de estas limitaciones. Ya hemos visto que cada observación proporciona una ecuación de condición de primer grado que siempre puede disponerse de manera tal que todos sus términos estén en el primer miembro, el segundo [miembro] siendo cero. El uso de estas ecuaciones es una de las causas principales de la gran precisión de nuestras tablas astronómicas, porque así se ha hecho que concurra un número inmenso de excelentes observaciones al determinar sus elementos. Cuando haya solamente un elemento a ser determinado, Cotes prescribió que las ecuaciones de condición deben prepararse de modo tal que el coeficiente del elemento desconocido sea positivo en cada una de ellas, y que todas estas ecuaciones se añadan para así formar una ecuación final desde la que se derive el valor de este elemento. La regla de Cotes fue seguida por todos los calculadores, pero como no consiguió determinar varios elementos, no hubo una regla fija para combinar las ecuaciones de condición de modo tal que se obtuviesen las necesarias ecuaciones finales; pero para cada elemento uno elige las observaciones más apropiadas para determinarlo. Fue con el fin de evitar estos tanteos que Legendre y Gauss concluyeron añadir los cuadrados de los primeros miembros de las ecuaciones de condición, y hacer de la suma un mínimo al variar cada elemento desconocido; por este medio se obtienen directamente tantas ecuaciones finales como hayan elementos. Pero, ¿los valores determinados por estas ecuaciones merecen la preferencia sobre todos aquellos que pueden obtenerse por otros medios? El cálculo de probabilidades pudo responder por sí solo esta pregunta. Lo apliqué, pues, a este asunto, y por un análisis delicado obtuve una regla que incluye al método anterior y que posee la ventaja de ofrecer por un proceso regular, además de los elementos deseados, la posibilidad de obtenerlos con la mayor muestra de evidencia desde la totalidad de las observaciones, y de determinar los valores que dejan solamente los mínimos errores posibles a ser temidos.

Sin embargo, tenemos solamente un conocimiento imperfecto de los resultados obtenidos siempre que sea desconocida la ley de los errores a los que son susceptibles;

debemos poder asignar la probabilidad de que estos errores estén contenidos en límites dados, lo que equivale a determinar aquello que he llamado el *peso* de un resultado. El análisis conduce a fórmulas generales y simples para este propósito. He aplicado este análisis a los resultados de observaciones geodésicas. El problema general consiste en determinar las probabilidades de que los valores de una o de varias funciones lineales de los errores de un gran número de observaciones estén contenidos en cualesquiera límites.

La ley de la posibilidad de los errores de observaciones introduce en las expresiones de estas probabilidades una constante cuyo valor parece requerir el conocimiento de esta ley, que casi siempre es desconocida. Por fortuna, esta constante puede determinarse desde las observaciones.

En la investigación de elementos astronómicos está dada por la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada observación y la observación calculada. Al ser proporcionales a la raíz cuadrada de esta suma los errores igualmente probables, uno puede, por la comparación de estos cuadrados, apreciar la exactitud relativa de las distintas tablas de la misma estrella. En las operaciones geodésicas estos cuadrados son remplazados por los cuadrados de los errores de las sumas observadas de los tres ángulos de cada triángulo. La comparación de los cuadrados de estos errores nos permitirá juzgar la precisión relativa de los instrumentos con los que han sido medidos los ángulos. Por esta comparación se ve la ventaja del círculo de reflexión sobre los instrumentos que ha remplazado en la geodesia.

En las observaciones suelen existir muchas fuentes de errores; así, las posiciones de las estrellas estando determinadas por medio del telescopio meridiano y del círculo, ambos susceptibles a errores cuya ley de probabilidad no debería suponerse como la misma, los elementos que se deducen desde estas posiciones están afectados por estos errores. Las ecuaciones de condición, que se hacen para obtener estos elementos, contienen los errores de cada instrumento y tienen diversos coeficientes. El sistema de factores más ventajoso por el cual deben multiplicarse respectivamente estas ecuaciones para obtener, por la unión de los productos, tantas ecuaciones finales como hayan elementos a ser determinados, ya no es el de los coeficientes de los elementos en cada ecuación de condición. El análisis que he utilizado lleva fácilmente, sea cual sea el número de las fuentes de error, al sistema de factores que da los resultados más ventajosos, o aquellos en donde el mismo error es menos probable que en cualquier otro sistema. El mismo análisis determina las leyes de probabilidad de los errores de estos resultados. Estas fórmulas contienen tantas constantes desconocidas como hayan fuentes de error, y dependen de las leyes de probabilidad de estos errores. Ya se ha visto que, en el caso de una sola fuente, esta constante puede determinarse por la formación de la suma de los cuadrados de los residuos de cada ecuación de condición cuando han sido sustituidos los valores encontrados para estos elementos. Un proceso similar generalmente da valores de estas constantes, sea cual sea su número, lo que completa la aplicación del cálculo de probabilidades a los resultados de observaciones.

Debo hacer aquí una observación importante. La pequeña incertidumbre que dejan las observaciones, cuando no son numerosas, con respecto a los valores de las constantes recién discutidas, hace un poco inciertas las probabilidades determinadas por el análisis. Pero casi siempre basta con saber si la probabilidad de que los errores de los resultados obtenidos estén comprendidos dentro de límites estrechos se aproxima cercanamente a la unidad; y cuando no lo hace, basta con saber hasta qué punto han de multiplicarse las observaciones con el fin de obtener una probabilidad tal que no quede ninguna duda razonable con respecto a la exactitud de los resultados. Las fórmulas analíticas de probabilidades satisfacen perfectamente este requerimiento, y en esta conexión pueden ser vistas como el complemento necesario de las ciencias basadas en una totalidad de observaciones susceptibles de error. Son igualmente indispensables para resolver un gran número de problemas en las ciencias natural y moral. Las causas regulares de los fenómenos suelen ser, o bien desconocidas, o bien demasiado complicadas como para ser sometidas al cálculo; además, su acción suele estar perturbada por causas accidentales e irregulares. Pero siempre queda su impresión en los eventos producidos por todas estas causas, y conduce a modificaciones que solamente puede determinar una larga serie de observaciones. El análisis de probabilidades desarrolla estas modificaciones; asigna la probabilidad de sus causas y señala los medios para aumentar continuamente esta probabilidad. Así, en medio de las causas irregulares que perturban la atmósfera, los cambios periódicos del calor solar, del día a la noche y del invierno al verano, producen en la presión de esta gran masa de fluido y en la correspondiente altura del barómetro, las oscilaciones diurnas y anuales; y numerosas observaciones barométricas han revelado la primera con una probabilidad al menos igual a la de los hechos que consideramos como ciertos. Así, una vez más la serie de eventos históricos nos muestra la acción constante de los grandes principios de la ética en medio de las pasiones y de los diversos intereses que perturban a las sociedades en todos los sentidos. Es notable que una ciencia que comenzó con la consideración de juegos de azar se eleve al rango de los asuntos más importantes del conocimiento humano.

He reunido todos estos métodos en mi *Theorie analytique des Probabilites*, en donde he propuesto exponer, del modo más general, los principios y el análisis del cálculo de probabilidades, así como las soluciones de los problemas más difíciles e interesantes que presenta el cálculo.

En este ensayo se ve que la teoría de probabilidades es, en el fondo, únicamente sentido común reducido al cálculo; nos permite apreciar con exactitud aquello que las mentes exactas sienten por una especie de instinto sin ser capaces a menudo de ofrecer una razón para él. No deja arbitrariedad en la elección de opiniones y lados a ser tomados, y por su uso siempre puede determinarse la elección más ventajosa. De ahí que supla muy felizmente la ignorancia y la debilidad de la mente humana. Si consideramos los métodos analíticos a los que ha dado lugar esta teoría; la verdad de los principios que le sirven como base; la fina y delicada lógica que requiere su empleo en la solución de problemas; el aparecimiento de la utilidad pública que descansa sobre ella; la extensión que ha recibido y que aún puede recibir por su aplicación a las cuestiones más importantes de la filosofía natural y de la ciencia moral; en definitiva, si consideramos que, incluso en las cosas que no pueden someterse al cálculo, ofrece los consejos más seguros que pueden guiarnos en nuestros juicios, y nos enseña a evadir las ilusiones que a menudo nos confunden, entonces veremos que no hay ciencia más digna de nuestros pensamientos, y que ninguna más útil podría ser incorporada al sistema de instrucción pública.