Investigaciones lógico-combinatorias en la satisfacibilidad o demostrabilidad de proposiciones matemáticas

Por

Thoralf Skolem

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem

Publicado originalmente en Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo (1920). La Academia Noruega de Ciencias y Letras otorgó los permisos de traducción y publicación digital de esta obra para esta colección.

Una prueba simplificada de un teorema de L. Löwenheim, así como generalizaciones del teorema

En el volumen 76 de *Mathematische Annalen*, Löwenheim probó un interesante y muy notable teorema sobre las llamadas "expresiones de primer orden". El teorema establece que cada expresión de primer orden es o bien contradictoria o ya satisfacible en un dominio numerablemente infinito. Por una expresión de primer orden Löwenheim entiende una expresión construida desde coeficientes relativos por medio de las cinco operaciones lógicas fundamentales, a saber, en la terminología de Schröder, multiplicación y adición idénticas, negación, productación, y sumación, con las productaciones y las sumaciones extendiéndose únicamente sobre individuos. Las cinco operaciones mencionadas son denotadas, respectivamente, por un punto (o simplemente yuxtaposición), el signo +, la barra $\bar{}$, y los signos Π y Σ. Löwenheim demuestra este teorema por medio del "desarrollo" de Schröder de productos y sumas, un procedimiento que toma un signo Π a través y a la izquierda de un signo Σ, o viceversa. Pero este procedimiento es un tanto implícito, y hace necesario introducir, por individuos, símbolos que sean subíndices en los coeficientes relativos. En lo que sigue quiero ofrecer una prueba más simple, en la que se evitan tales subíndices, y, además, probar algunos lemas que son interesantes por sí mismos; por último, también estableceré algunas generalizaciones del teorema de Löwenheim.

En lugar de hablar de expresiones de primer orden, prefiero hablar de proposiciones de primer orden.

DEFINICIÓN 1. *Una proposición de primer orden es una proposición construida desde coeficientes relativos en el sentido de Schröder por medio de las cinco operaciones mencionadas arriba, con productaciones y sumaciones extendiéndose únicamente sobre individuos*.

Ejemplos. (1) $\Pi_x \Sigma_y R_{xy}$. En palabras esto dice: Para cada *x* existe un *y* tal que se obtiene la relación *R* entre *x* e *y*.

(2) $\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z (R_{xy} + T_{xyz})$. En palabras esto dice: Existe un *x* tal que para cada *y* es posible determinar un *z* tal que o bien se sostiene la relación binaria *R* entre *x* e *y* o se sostiene la relación ternaria *T* entre *x*, *y*, y *z*.

(3) $\Sigma_x A_x . \Sigma_y \Pi_z R_{yz} S_{zx}$. En palabras esto dice: Existe un *x* que pertenece a la clase *A*, y además existe un *y* tal que para cada *z* se obtiene la relación *R* entre *y* y *z*, y la relación *S* entre *z* y *x*.

DEFINICIÓN 2. *Se dirá que una proposición de primer orden está en forma normal si está escrita de tal modo que comience con signos* Π*, siendo éstos seguidos por signos* Σ *y después por una expresión que esté libre de signos* Π *y* Σ. *También se dirá que cada proposición de primer orden que únicamente contenga signos* Π *o* Σ *está en forma normal, siempre que estos signos estén al comienzo y se sigan uno del otro*.

Ejemplos. $\Pi_x \Sigma_y R_{xy}$ está en forma normal, e igualmente $\Pi_x \Sigma_y \Sigma_z (R_{xy} + S_{yz})$ y $\Pi_x \Pi_y \Sigma_z (R_{xy} S_{xz} + \overline{A}_x)$. Por otra parte, $\Sigma_x \Pi_y R_{xy}$ no está en forma normal. Pero $\Pi_x (\overline{A}_x + B_x)$ y $\Sigma_x A_x$ están, de nuevo, en forma normal.

TEOREMA 1. *Si U es una proposición de primer orden arbitraria, existe una proposición de primer orden U´ en forma normal con la propiedad de que U es satisfacible en un dominio dado siempre que U´ lo sea, y a la inversa*.

Prueba. Podemos primero considerar una proposición de la forma

$$(1)\ \Pi_{x_1} \Pi_{x_2} \ldots \Pi_{x_m} \Sigma_{y_1} \Sigma_{y_2} \ldots \Sigma_{y_n} \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_n z_1 \ldots z_p},$$

donde $U_{x_1 \ldots z_p}$ es una proposición construida desde coeficientes relativos por uso exclusivo de las tres operaciones de multiplicación idéntica, adición idéntica, y negación. Aquí podemos introducir un coeficiente relativo $R_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n}$, estableciendo

$$R_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n} = \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n z_1 \ldots z_p}$$

para todos los valores de $x_1, \ldots, x_m, y_1 \ldots y_n$; por lo tanto, si queremos, podemos escribir

$$(2)\ \Pi_{x_1}\ldots\Pi_{x_m}\Pi_{y_1}\ldots\Pi_{y_n}(R_{x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n}=\Pi_{z_1}\ldots\Pi_{z_p}U_{x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n z_1\ldots z_p}).$$

Es claro que, no obstante cómo podrían elegirse los relativos cuyos coeficientes ocurren en U, en el dominio existe (o, más precisamente, en el dominio 1^{m+n}, como sería escrito en la notación de Schröder) una R relativa $(m+n)$-aria tal que (2) está satisfecha. De hecho, (2) no es otra cosa que una definición ordinaria de una relación R. Ahora la proposición (2) puede ser transformada en

$$\Pi_{x_1}\ldots\Pi_{x_m}\Pi_{y_1}\ldots\Pi_{y_n}(\overline{R}_{x_1\ldots y_n}+\Pi_{z_1}\ldots\Pi_{z_p}U_{x_1\ldots z_p})$$
$$(\Sigma_{u_1}\ldots\Sigma_{u_p}\overline{U}_{x_1\ldots y_n u_1\ldots u_p}+R_{x_1\ldots y_n}),$$

y esto, a su vez, en

$$(3)\quad \begin{aligned}&\Pi_{x_1}\ldots\Pi_{x_m}\Pi_{y_1}\ldots\Pi_{y_n}\Pi_{z_1}\ldots\Pi_{z_p}\Sigma_{u_1}\ldots\Sigma_{u_p}\\ &\qquad(\overline{R}_{x_1\ldots y_n}+U_{x_1\ldots y_n z_1\ldots z_p})(R_{x_1\ldots y_n}+\overline{U}_{x_1\ldots y_n u_1\ldots u_p}),\end{aligned}$$

y (3) está en forma normal. Pero como consecuencia de (2), también podemos escribir (1) como

$$(4)\ \Pi_{x_1}\ldots\Pi_{x_m}\Sigma_{y_1}\ldots\Sigma_{y_n}R_{x_1\ldots x_m y_1\ldots y_n},$$

que también está en forma normal. Finalmente, la conjunción lógica (producto proposicional) de (3) y (4) puede escribirse así:

$$(5)\quad \begin{aligned}&\Pi_{\xi_1}\ldots\Pi_{\xi_m}\Pi_{x_1}\ldots\Pi_{x_m}\Pi_{y_1}\ldots\Pi_{y_n}\Pi_{z_1}\ldots\Pi_{z_p}\Sigma_{\eta_1}\ldots\Sigma_{\eta_n}\Sigma_{u_1}\ldots\Sigma_{u_p}\\ &\qquad R_{\xi_1\ldots\xi_m\eta_1\ldots\eta_n}(\overline{R}_{x_1\ldots y_n}+U_{x_1\ldots y_n z_1\ldots z_p})(R_{x_1\ldots y_n}+\overline{U}_{x_1\ldots y_n u_1\ldots u_p}).\end{aligned}$$

Esta proposición también está en forma normal.

Ahora, si en el dominio dado existen valores de los símbolos relativos ocurriendo en (1) tales que (1) está satisfecha, también será posible especificar en el dominio valores para los símbolos relativos ocurriendo en (5) tales que (5) estará satisfecha. De hecho, aparte de R, los símbolos relativos ocurriendo en (5) son los mismos que los de (1), y R siempre puede encontrarse en virtud de la "definición" (2) si los relativos ocurriendo en (1) son conocidos. Es inmediatamente claro que, a la inversa, (1) es satisfacible si (5) lo es, porque (5) es la conjunción lógica de (2) y (4), de donde se sigue (1).

Esto prueba que el teorema 1 es verdadero para el caso de una fórmula en la que encontramos solamente dos cambios de un signo Π a uno Σ a medida que leemos de izquierda a derecha. Pero ahora es fácil ver cómo ha de llevarse a cabo la prueba general.

Pues esté dada la proposición

$$(6)\quad \begin{array}{l} \Pi_{x_1 \ldots x_{n_1}} \Sigma_{x_{n_1+1} \ldots x_{n_1+n_2}} \Pi_{x_{n_1+n_2+1} \ldots x_{n_1+n_2+n_3}} \ldots \\ \qquad\qquad \Sigma_{x_{n_1+\ldots+n_{y-1}+1} \ldots x_{n_1+\ldots+n_y}} U_{x_1 \ldots x_{n_1+n_2+\ldots+n_y}} . \end{array}$$

(Así, aquí asumo que los cuantificadores más a la derecha son signos Σ, mientras que en el caso recién considerado teníamos signos Π como los cuantificadores más a la derecha; pero el procedimiento siempre es el mismo.) Después defino un número de relaciones auxiliares por medio de las siguientes ecuaciones:

$$(7)\quad \begin{array}{l} \Sigma_{x_{n_1+\ldots+n_{y-1}+1}} \Sigma_{x_{n_1+\ldots+n_{y-1}+2}} \ldots \Sigma_{x_{n_1+n_2+\ldots+n_y}} U_{x_1 \ldots x_{n_1+\ldots+n_y}} \\ \qquad\qquad = R^{(1)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\ldots+n_{y-1}}} , \\ \Pi_{x_{n_1+\ldots+n_{y-2}+1}} \Pi_{x_{n_1+\ldots+n_{y-2}+2}} \ldots \Pi_{x_{n_1+\ldots+n_{y-1}}} R^{(1)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\ldots+n_{y-1}}} \\ \qquad\qquad = R^{(2)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\ldots+n_{y-2}}} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_{x_{n_1+n_2+1}} \Pi_{x_{n_1+n_2+2}} \ldots \Pi_{x_{n_1+n_2+n_3}} R^{(y-3)}_{x_{n_1} \ldots x_{n_1+n_2+n_3}} = R^{(y-2)}_{x_{n_1} \ldots x_{n_1+n_2}} . \end{array}$$

Estrictamente hablando, cada ecuación aquí habría de estar prefijada por signos Π, a saber, aquellos correspondientes a todas las variables *x* que ocurren libres. Entonces podemos fácilmente convencernos de que cada una de estas proposiciones, y por lo tanto las definiciones de $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots,$ pueden ser llevadas a forma normal del mismo modo que arriba llevamos (2) a la forma normal (3). Pero entonces, desde luego, la conjunción lógica de estas definiciones de $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots,$ también puede ser escrita en forma normal. En virtud de (7), no obstante, la proposición (6) adquiere la forma

$$(8)\ \Pi_{x_1 \ldots x_{n_1}} \Sigma_{x_{n_1+1} \ldots x_{n_1+n_2}} R^{(y-2)}_{x_1 \ldots x_{n_1+n_2}} ,$$

que también es normal. Por consiguiente, la conjunción lógica de (7) y (8) también puede escribirse como una proposición *U´* en forma normal. Si ahora es posible encontrar, para los símbolos relativos ocurriendo en (6), valores tales que (6) esté satisfecha, a cuenta de (7) podemos encontrar sucesivamente $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots,$ y así *U´* estará satisfecha. Si, a la inversa, *U´* está satisfecha para ciertos valores de los símbolos relativos ocurriendo en *U´*, entonces (7) y (8) están satisfechas, y por tanto también lo está (6). Esto prueba con toda generalidad que el teorema 1 es verdadero.

La cuestión de cuándo es satisfacible una proposición de primer orden puede entonces reemplazarse por la cuestión más sencilla: ¿cuándo es satisfacible una proposición en forma normal? En ese punto se sostiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Cada proposición en forma normal o bien es una contradicción o ya es satisfacible en un dominio finito o numerablemente infinito*.

Ahora sería extremadamente fácil demostrar este teorema a la manera de Löwenheim, pero *sin el uso de símbolos para individuos como subíndices*. Sin embargo, preferiría llevar a cabo la prueba de otra manera, una en la que no razonamos con elecciones sucesivas, sino que procedemos más directamente de acuerdo con los métodos habituales de la lógica matemática.[1]

Primero podemos considerar el caso más simple posible de una proposición de primer orden en forma normal conteniendo ambos signos Π y Σ, a saber,

$$\Pi_x \Sigma_y U_{xy},$$

donde U_{xy} es una proposición construida por medio de conjunción, disyunción, y negación a partir de coeficientes relativos teniendo únicamente a *x* y a *y* como subíndices. Ahora asumamos que esta proposición está satisfecha en un dominio dado para ciertos valores de los relativos. Entonces, *en virtud del principio de elección*, podemos imaginar que para cada *x* se elige un *y* unívocamente determinado de tal manera que U_{xy} resulte verdadera. Pues esta es una elección de un elemento desde cada una de las clases que obtenemos si

[1] Para los teoremas más generales que aparecen más tarde en esta sección, llevaré a cabo las pruebas de una manera cercana a la de Löwenheim.

para cada x reunimos los y para los cuales U_{xy} es verdadera. Esto define un mapeo univaluado del dominio en sí mismo. Asúmase que, para cada x, x' es la imagen de x. Entonces, para los valores asignados a los símbolos relativos, la proposición $U_{xx'}$ es verdadera para cada x. Podemos escribir eso como sigue:

$$\overset{O}{\Pi}_x U_{xx'},$$

donde O es el dominio. Sea a un individuo particular de O. Entonces existen ciertas clases X incluidas en O tales que, primero, contienen a a como elemento (X_a es verdadera) y, segundo, contienen a x' siempre que contengan a x ($X_{x'}$ es verdadera siempre que X_x sea verdadera o, en otras palabras, $\overline{X}_x + X_{x'}$ es verdadera para cada x). Ahora sea X^0 el producto (idéntico) lógico (intersección) de todas estas clases. Entonces, como es bien sabido, X^0 es o bien una clase finita o una [clase] numerablemente infinita (véase la teoría de cadenas de Dedekind; *1888*). Pero además es claro que

$$\overset{X^0}{\Pi}_x U_{xx'}$$

debe valer. Por lo tanto esto prueba que, si $\Pi_x \Sigma_y U_{xy}$ está satisfecha en un dominio O, también es satisfacible en un dominio finito o numerablemente infinito.

Con el fin de probar el teorema 2 con toda generalidad, es de lo más conveniente probar primero dos lemas simples.

Lema 1. Sea $R_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n}$ una relación $(m+n)$-aria con la propiedad de que, si $x_1, \ldots, x_m$ están arbitrariamente dados (en el dominio dado O), hay un y sólo un y_1, un y sólo un y_2, y así sucesivamente hasta un y sólo un y_n tales que $R_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n}$ se sostiene. Sea K una clase finita arbitraria, y sea K_1 la clase de todos los valores de $y_1, \ldots, y_n$ que corresponden a las varias elecciones posibles de $x_1, \ldots, x_m$ en K. Además, sea $K' = K + K_1$ la suma de las dos clases K y K_1. Entonces K' también es una clase finita.

En realidad es muy claro que esta proposición es verdadera. Si K consiste en k objetos, existen en total k^m elecciones posibles de $x_1,...,x_m$, y por tanto también k^m $y_1,...,y_n$ secuencias correspondientes. Así, el número de elementos de K_1 es a lo mucho $k^m n$, y K' contiene a lo mucho $k^m n+k$ objetos.

Lema 2. Sea R una [relación] relativa $(m+n)$-aria con la propiedad mencionada en el lema 1, y sea Ξ el producto lógico de todas las clases X que poseen las siguientes dos propiedades:

(1) a es un elemento de X;

(2) Si $x_1,...,x_m$ son arbitrariamente elegidos en X, entonces X también contiene los objetos $y_1,...,y_n$ para los que se sostiene $R_{x_1...x_m y_1...y_n}$.

Entonces Ξ es o bien una clase finita o una [clase] numerablemente infinita.

Prueba. Podemos denotar con K_1 a la clase de todos los objetos y ocurriendo en las secuencias $y_1,...,y_n$ que corresponden a las varias elecciones posibles de $x_1,...,x_m$ en K, y en general denotamos con K' a la clase $K+K_1$. Por consiguiente, el paso de K a K' produce un mapeo univaluado de la totalidad de todas las clases en sí misma. Denotaré con $\{a\}$ a la clase que contiene a a como su único elemento. Entonces considero primero a aquellas clases de clases teniendo las dos propiedades de que (1) contienen a $\{a\}$ como elemento y (2) siempre que contengan una clase K, contienen a K' como elemento. Sea A la intersección de estas clases de clases. Entonces A es una cadena de Dedekind ordinaria y, como bien se sabe, consiste en las clases $\{a\},\{a\}',\{a\}''$, y así ad infinitum. Empero, las clases que son elementos de A no necesitan ser todas mutuamente distintas; en cualquier caso, A es una clase de clases finita o una [clase de clases] numerablemente infinita.

Como consecuencia del lema 1 es claro, además, que cada elemento de A debe ser una clase finita. Porque, primero, $\{a\}$ es finita, y, segundo, K' es finita siempre que K lo sea. La clase de todas las clases finitas debe entonces, de acuerdo con la definición de *A*, contener todo *A*; esto es, cada elemento de *A* es una clase finita.

Por teoremas bien conocidos de la teoría de conjuntos, se sigue entonces que la suma de todas las clases que son elementos de *A* – llamémosla *SA* – debe ser una clase finita o numerablemente infinita.

Finalmente, puede mostrarse que $\Xi = SA$. Pues, primero, $\{a\}$ está incluida en Ξ como una subclase, y es claro que, si *K* es una subclase de Ξ, *K´* también es una subclase de Ξ. De esto se sigue que cada elemento de *A* es una subclase de Ξ, y por tanto se sigue que *SA* está incluida en Ξ como una subclase. Pero, a la inversa, Ξ también debe ser una subclase de *SA*. Pues *a* es un elemento de *SA*, y, si $x_1,...,x_m$ son arbitrariamente elegidos en *SA*, entonces – como $\{a\}$ es una subclase de $\{a\}', \{a\}'$ a su vez una subclase de $\{a\}''$, y así sucesivamente – existe un elemento *K* de *A* que contiene todo $x_1,...,x_m$; entonces cada *y* de la correspondiente secuencia $y_1,...,y_n$ pertenece a *K´*, que es el elemento sucesor de *K* en *A*, y consecuentemente todos estos *y* pertenecen a *SA*. De acuerdo con la definición de Ξ, Ξ debe ser entonces una subclase de *SA*. Por lo tanto $SA = \Xi$, de donde se sigue que Ξ es finita o numerablemente infinita.

Ahora es fácil llevar a cabo la prueba del teorema 2. Esté dada una proposición de primer orden en forma normal

$$\Pi_{x_1}...\Pi_{x_m}\Sigma_{y_1}...\Sigma_{y_n}U_{x_1...x_m y_1...y_n},$$

y asumamos que está satisfecha en un dominio dado para ciertos valores de los símbolos relativos ocurriendo en *U*. Entonces por el principio de elección podemos, para cada elección de $x_1,...,x_m$, imaginar una secuencia definida elegida de entre las correspondientes secuencias $y_1,...,y_n$, es decir, las secuencias $y_1,...,y_n$ para las cuales $U_{x_1...x_m y_1...y_n}$ es verdadera. Podemos apropiadamente denotar con $y_1(x_1,...,x_m), y_2(x_1,...,x_m),..., y_n(x_1,...,x_m)$ o, más brevemente, con $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, a la secuencia de los *y* que corresponden a la secuencia $x_1,...,x_m$. Entonces la proposición

$$U_{x_1 \dots x_m y_1(x) y_2(x) \dots y_n(x)}$$

vale para cada elección de $x_1, \dots, x_m$. Además, $U_{x_1 \dots x_m y_1(x) \dots y_n(x)}$ es una relación con la propiedad considerada en los lemas. Por lo tanto, si asumimos que a es un individuo particular y que Ξ es la intersección de todas las clases X que contienen a a como elemento y contienen los y de la secuencia $y_1(x_1, \dots, x_m), y_2(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)$ siempre que contengan a $x_1, \dots, x_m$, entonces Ξ es finita o numerablemente infinita, y, además,

$$U_{x_1 \dots x_m y_1(x) \dots y_n(x)}$$

por supuesto que vale para todas las elecciones posibles de $x_1, \dots, x_m$ en Ξ, con $y_1(x), \dots, y_n(x)$ perteneciendo a Ξ siempre que $x_1, \dots, x_m$ lo hagan.

El teorema 2 admite generalizaciones de orden mayor. Así, no es difícil probar lo siguiente: o bien es contradictorio suponer que una secuencia simplemente infinita de proposiciones de primer orden en forma normal es simultáneamente satisfacible o bien la secuencia ya es simultáneamente satisfacible en un dominio numerablemente infinito. Por medio de la reducción expuesta arriba de arbitrarias proposiciones de primer orden a forma normal reconocemos que esto también debe valer para cada producto de una secuencia simplemente infinita de arbitrarias proposiciones de primer orden. Más abajo se demostrará que tal teorema seguirá valiendo incluso si tiene lugar un número infinito de disyunciones lógicas. Para simplificar la presentación, me limitaré a ofrecer una prueba para el caso en el que tenemos un producto lógico de una secuencia simplemente infinita de proposiciones de la forma $\Pi_x \Sigma_y U_{xy}$. En principio, la extensión al caso general de una secuencia infinita de arbitrarios factores proposicionales en forma normal no supone ninguna dificultad.

Así, esté dado el producto proposicional

$$(9) \; \Pi_{x_1} \Sigma_{y_1} U^1_{x_1 y_1} \Pi_{x_2} \Sigma_{y_2} U^2_{x_2 y_2} \dots \text{ad infinitum},$$

donde las U son proposiciones construidas desde coeficientes relativos por medio de un número finito de aplicaciones de conjunción, disyunción, y negación solamente. Desde luego, no necesitamos considerar con mayor detalle el caso en el que ningunos dos factores proposicionales arbitrarios del producto (9) tienen algún símbolo relativo común; pues, si el producto proposicional entero no es una contradicción, es inmediatamente claro que ninguno de los factores proposicionales es una contradicción, y entonces cada uno de éstos por sí solo puede satisfacerse en un dominio numerablemente infinito. Pero, como en este caso los factores proposicionales son completamente independientes entre sí, eso también hará del producto entero una proposición verdadera. Incidentalmente, si ningunos dos de los factores proposicionales individuales tienen símbolos relativos en común, es claro que no es necesario asumir que el conjunto de factores es numerable. Por lo tanto, de ahora en adelante únicamente consideraremos el caso en el que los factores tienen símbolos relativos en común.

Asumamos ahora que la proposición (9) está satisfecha en un dominio *O*. Entonces, a fortiori, la proposición

$$\Pi_{x_r} \Sigma_{y_r} U^r_{x_r y_r}$$

está satisfecha para cada *r*. En virtud del principio de elección podemos elegir, para cada x_r, un y_r unívocamente determinado de entre aquellos para los que $U^r_{x_r y_r}$ es verdadera; denotémoslo con $y_r(x_r)$. Además elegimos un individuo arbitrario en O y lo llamamos 1. Entonces, además, $y_1(1)$ será llamado 2, $y_1(2)$ será llamado 3, $y_2(1)$ será llamado 4, y así sucesivamente. La ley que rige a estas sucesivas asignaciones de nombres será clara desde la siguiente tabla:

$$y_1(1) = 2$$

$$y_1(2) = 3 \quad y_2(1) = 4$$

$$y_1(3) = 5 \quad y_1(4) = 6 \quad y_2(2) = 7 \quad y_3(1) = 8$$

$$y_1(5) = 9 \quad y_1(6) = 10 \quad y_1(7) = 11 \quad y_1(8) = 12 \quad y_2(3) = 13 \quad y_2(4) = 14$$

$$y_3(2) = 15 \quad y_4(1) = 16$$

…………………………………………………………………..

Ahora, según la asunción, todas las proposiciones $U^{r}_{x_r y_r (x)_r}$ son verdaderas, y consecuentemente el producto proposicional

$$U^{1}_{1,2}U^{1}_{2,3}U^{1}_{3,5}\ldots U^{2}_{1,4}U^{2}_{2,7}\ldots U^{3}_{1,8}U^{3}_{2,15}\ldots U^{4}_{1,16}\ldots$$

también debe ser verdadero. Pero desde esto vemos que la proposición

$$\Pi_{x_1}\Sigma_{y_1}U^{1}_{x_1 y_1}\Pi_{x_2}\Sigma_{y_2}U^{2}_{x_2 y_2}\ldots$$

está satisfecha, incluso si las productaciones y sumaciones varían únicamente sobre los valores 1, 2, 3,… de los subíndices; esto es, la proposición (9) también es satisfacible en un dominio numerable.

Por lo tanto se sostiene el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Si una proposición puede ser representada como un producto de un conjunto numerable de proposiciones de primer orden, o bien es una contradicción o ya es satisfacible en un dominio numerable*.

Observación. Uno obtiene fácilmente proposiciones de esa forma cuando trata con la formación de cadenas. Si, por ejemplo, $\overset{*}{R}$ denota la cadena correspondiente a la relación binaria *R* (la "relación ancestral" de Russell y Whitehead (*1910*, p. 569)), entonces tenemos

$$\overset{*}{R}_{xy} = 1'_{xy} + R_{xy} + \Sigma_z R_{xz}R_{zy} + \Sigma_u \Sigma_v R_{xu}R_{uv}R_{vy} + \ldots,$$

donde 1´ es la notación de Schröder para la relación "idéntico a". La negación de $\overset{*}{R}_{xy}$ será entonces el producto de una secuencia infinita de proposiciones de primer orden.

Con el fin de poder responder a la cuestión de qué sucederá cuando un número infinito de disyunciones también tenga lugar en la proposición dada, es necesario considerar sobre todas las cosas el siguiente hecho autoevidente:

Una suma proposicional está satisfecha en un cierto dominio para ciertos valores de los símbolos relativos que ocurren en ella si y sólo si al menos uno de los sumandos proposicionales está satisfecho para precisamente estos valores de los símbolos.

Entonces puede demostrarse el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Una suma (numerable o no numerable) de infinitas proposiciones de primer orden o bien no es satisfacible en absoluto o bien ya está satisfecha en un dominio numerablemente infinito para ciertos valores de los símbolos relativos que ocurren en las proposiciones*.

Prueba. Si la suma proposicional dada U está satisfecha en un dominio para ciertos valores de los símbolos relativos que ocurren en las proposiciones, entonces (de acuerdo con la observación recién hecha) al menos uno de los sumandos, digamos A, debe estar satisfecho para precisamente estos valores de los símbolos. Pero, ya que todos los sumandos son proposiciones de primer orden, A ya debe estar, de acuerdo con el teorema 2, satisfecho en un dominio numerable para ciertos valores de los símbolos ocurriendo en A. De esta manera toda la suma proposicional U también estará satisfecha en el dominio numerable si además se eligen valores arbitrarios en este mismo dominio para los símbolos relativos, si los hay, que ocurran en U pero no en A.

Ahora es fácil ver que, *en general, todas las proposiciones construidas desde proposiciones de primer orden por medio de un número finito o numerablemente infinito de aplicaciones de conjunción y disyunción ya pueden estar satisfechas en lo infinito numerable si pueden estar satisfechas en absoluto*.

En primer lugar es claro que *una suma infinita* $U_1 + U_2 + ...$, *donde cada* U_r *es un producto de infinitas proposiciones de primer orden* $U_r^s (s = 1, 2, ...)$, *o bien nunca está satisfecha o ya está satisfecha en lo infinito numerable*. En realidad, la prueba de esto puede llevarse a cabo de exactamente la misma manera que la prueba del teorema 4; hace uso del teorema 3.

Tenemos además el siguiente teorema:

TEOREMA 5. *Asúmase que la proposición U es un producto de infinitas proposiciones* U_r, *cada una de las cuales siendo a su vez una suma de infinitas proposiciones de primer orden, a saber,*

$$U_r = \Sigma_s{}_1^\infty U_r^s,$$

donde cada U_r^s *es una proposición de primer orden. Entonces U o bien nunca está satisfecha o ya está satisfecha en un dominio numerable para una elección apropiada de valores para los símbolos relativos.*

Prueba. La multiplicación proposicional puede llevarse a cabo de tal suerte que *U* se vuelva una suma de productos de proposiciones de primer orden, aunque, para estar seguros, el conjunto de estas proposiciones no es numerable. Si *U* está satisfecha para ciertos valores de los símbolos relativos que ocurren en ella, al menos un sumando debe estar satisfecho para estos valores de los símbolos. Pero tal sumando es el producto de una secuencia simplemente infinita de proposiciones de primer orden y, por el teorema 3, ya está por lo tanto satisfecho en un dominio numerable. Entonces la propia *U* también está satisfecha en el dominio numerable si adicionalmente se eligen valores arbitrarios en este dominio numerable para los símbolos relativos, si los hay, que ocurren en *U* pero no en el sumando en cuestión.

Desde luego, también puede emplearse el mismo método de prueba si la estructura de la proposición dada es todavía más compleja. Podríamos, por ejemplo, demostrar un teorema muy similar acerca de todas las proposiciones *U* que sean un producto de infinitas proposiciones U_r, cada una de las cuales siendo una suma de proposiciones U_r^s, donde cada U_r^s es un producto de proposiciones $U_{r,r'}^s$, cada una siendo a su vez una suma de proposiciones de primer orden $U_{r,r'}^{s,s'}$, y así sucesivamente.

De estos teoremas se sigue, entre otros, el siguiente resultado interesante:

TEOREMA 6. *Cada proposición construida desde coeficientes relativos por medio de un número finito de aplicaciones de conjunción, disyunción, negación, y productación y* *sumación sobre símbolos para individuos, así como por formación de cadenas, o nunca está satisfecha o ya está satisfecha en un dominio numerable para ciertos valores de los símbolos relativos.*

En realidad es muy claro que el teorema es verdadero, porque cada proposición generada por formación de cadenas puede escribirse en la forma de una suma simplemente infinita de proposiciones de primer orden. Véase la observación en la página 13.

Ejemplos. Una ecuación relativa como la de abajo (sólo han de ocurrir relativos binarios, y la notación es la de Schröder excepto por el símbolo $\overset{*}{R}$ para la cadena de R y el signo $\dagger$ para la adición relativa (véase la observación en la página 13)):

$$(x\breve{x} + \bar{x}\breve{\bar{x}}) \dagger \overset{*}{x} ; \bar{x} \dagger \overset{*}{\bar{x}} ; x = 0$$

no es soluble en ningún dominio o ya es soluble en un dominio numerablemente infinito.

Igualmente, la ecuación relativa

$$(\overset{*}{x} + \overset{*}{y})(\overset{*}{\breve{x}} + \overset{*}{\bar{y}}) ; (\bar{x} \dagger y) \dagger x ; y = 0$$

no es soluble en absoluto o ya es soluble en un dominio numerable.

Desde luego, vale precisamente lo mismo para la siguiente ecuación:

$$(x, y) + \overset{*}{(x, y)}; x\bar{y} = 0,$$

donde (u, v) ha de significar el relativo $1' + u;v + u;u;v;v + u;u;u;v;v;v + \ldots$ ad infinitum para valores arbitrarios de los relativos binarios u y v.

Y así sucesivamente.

Pero también quiero exponer otras generalizaciones del teorema 2. El teorema que sigue también vale:

TEOREMA 7. *Una proposición de la forma*

$$\Pi_{x_1}\Pi_{x_2}...\Pi_{x_m}\Sigma_{y_1}\Sigma_{y_2}...\text{ad inf. } U_{x_1...x_m y_1 y_2 \text{...ad inf.}}$$

o es una contradicción o está satisfecha en un dominio numerable para ciertos valores de los símbolos relativos ocurriendo en U.

Prueba. Asumimos que una proposición de esta forma está satisfecha en un dominio *O* para ciertos valores de los símbolos relativos. Imaginamos entonces que para cada secuencia de valores $x_1,...,x_m$ hemos elegido, con la ayuda del principio de elección, una secuencia definida de entre las secuencias de valores $y_1, y_2,...$ para las que $U_{x_1...x_m y_1 y_2...}$ es verdadera. A los *y* que tienen lugar en esta secuencia los denoto con $y_r(x_1,...,x_m)$ o, más brevemente, con $y_r(R)$, donde *R* denota la secuencia de los *x*. Sea *a* un individuo particular en *O*. Los objetos $y_r(a,a,...,a)$ forman entonces un conjunto a lo mucho numerablemente infinito M'_1. (En realidad puede ser un conjunto finito, porque los *y* no necesitan ser todos distintos.) Sea M_1 el conjunto conteniendo los elementos de M'_1 y, además, también a *a*; por lo tanto, $M_1 = M'_1 + \{a\}$. Entonces M_1 es a lo mucho numerablemente infinito. Las secuencias de valores $x_1,...,x_m$ que pueden elegirse dentro de M_1 y que son distintas de la secuencia $a,a,...,a$ ya considerada forman de nuevo un conjunto a lo mucho numerablemente infinito. Las secuencias de los *y* correspondientes a estas secuencias *R* de valores también forman, por tanto, un conjunto a lo mucho numerablemente infinito, y lo mismo vale para los objetos $y_r(R)$ que ocurren en estas secuencias. Sea M'_2 el conjunto de estos *y*, y sea $M_2 = M_1 + M'_2$. El conjunto de todas las secuencias de valores $x_1,...,x_m$ que pueden elegirse en M_2 pero todavía no en M_1 es, de nuevo, a lo mucho numerable. Consecuentemente, el conjunto de las correspondientes secuencias $y_r(x_1,...,x_m)$, justo como el conjunto de objetos $y_r(x_1,...,x_m)$ ocurriendo en ellas, es él mismo a lo mucho numerable. Sea M'_3 el conjunto de estos *y*, y sea $M_3 = M_2 + M'_3$. Continuamos indefinidamente de esta manera. Obtenemos una secuencia infinita $M_1, M_2, M_3,...$ de conjuntos cada vez más comprehensivos. El conjunto límite $M_\omega = M_1 + M_2 + ...$ también es entonces a lo mucho numerablemente infinito. Si $x_1,...,x_m$ son arbitrariamente elegidos dentro de M_ω, entonces $x_1,...,x_m$ ya deben ocurrir en los conjuntos $M_{\gamma_1},...,M_{\gamma_m}$, respectivamente, donde $\gamma_1,...,\gamma_m$ son números finitos, y entre estos números existe uno mayor, γ. Entonces todos los $x_1,...,x_m$ ocurren en M_γ, y en consecuencia cada $y_r(x_1,...,x_m)(r=1,2,...)$ ocurre en M'_γ, por lo tanto en $M_{\gamma+1}$, y por lo tanto también en M_ω. Más todavía, la proposición

$$U_{x_1...x_m y_1(x_1,...,x_m) y_2(x_1,...,x_m)...}$$

vale para cada elección de $x_1,...,x_m$ en M_ω. Esto demuestra el teorema.

También podemos probar de manera similar el siguiente teorema todavía más general:

TEOREMA 8. *Si una proposición U es el producto de un conjunto numerable de proposiciones de la forma mencionada en el teorema 7, entonces U ya está satisfecha en un dominio numerablemente infinito para ciertos valores de los símbolos relativos ocurriendo en U, siempre que U pueda satisfacerse en absoluto.*

Prueba. Si la proposición $U=\Pi_r{}_1^\infty U_r$, donde, para cada *r*, U_r es una proposición de la forma

$$\Pi_{x_1^r}\Pi_{x_2^r}...\Pi_{x_{m_r}^r}\Sigma_{y_1^r}\Sigma_{y_2^r}...U^r_{x_1^r...x_{m_r}^r y_1^r y_2^r...},$$

está satisfecha para ciertos valores de los relativos que ocurren en ella, entonces imaginamos, para cada secuencia $x_1^r,...,x_{m_r}^r$, una secuencia definida elegida de entre las correspondientes secuencias $y_1^r, y_2^r,...$ para las cuales U^r es verdadera. Entonces, para cada elección del número *r* y de los objetos $x_1^r,...,x_{m_r}^r$, las $y_1^r, y_2^r,...$ están unívocamente determinadas. Sea *a* un individuo particular del dominio. Entonces los objetos *y* correspondientes a la elección $x_1^1=a, x_2^1=a,...,x_{m_1}^1=a$ forman un conjunto M'_1 a lo mucho numerable. Sea $M_1=M'_1+\{a\}$. Las varias nuevas secuencias de valores $x_1^1,...,x_{m_1}^1$, junto con todas las posibles secuencias de valores $x_1^2,...,x_{m_2}^2$ tomadas dentro de M_1, forman de nuevo un conjunto a lo mucho numerable, y los objetos *y* ocurriendo en las secuencias de las *y* que corresponden a estas secuencias forman también por tanto un conjunto M'_2 a lo mucho numerablemente infinito. Sea $M_2 = M_1 + M'_2$. Entonces las secuencias de valores $x_1^1,...,x_{m_1}^1, x_1^2,...,x_{m_2}^2, x_1^3,...,x_{m_3}^3$ que pueden elegirse en M_2 pero que todavía no estaban elegidas en M_1 forman un conjunto a lo mucho numerable, y también así lo hacen los objetos *y* que tienen lugar en las varias secuencias correspondientes. Sea M'_3 este último conjunto y sea $M_3 = M_2 + M'_3$. Continuamos indefinidamente de esta forma y a la larga obtenemos un conjunto límite M_ω, la suma de los conjuntos crecientes $M_1, M_2,...,$ que también es a lo mucho numerablemente infinito, mientras que, como se ve fácilmente, cada una de las proposiciones U_r, y consecuentemente también *U*, está satisfecha en M_ω.