

*La arquitectura  
de las  
Matemáticas*

*Por*

*Nicolas Bourbaki*

*Traducción de*

*Emilio Méndez Pinto*

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE  
Título original: The Architecture of Mathematics

© De la traducción: Emilio Méndez Pinto

Publicado originalmente en inglés como: “The Architecture of Mathematics”, Nicolas Bourbaki, The American Mathematical Monthly, Vol. 57, No. 4, 221-232.

Derechos reservados. 1950.

The Mathematical Association of America ha cedido a esta colección los derechos de traducción.

Prohibida su reproducción por cualquier medio mecánico o eléctrico sin la autorización por escrito de los coeditores.

**1. ¿Matemática o matemáticas?** Presentar una perspectiva de todo el campo de la ciencia matemática tal como existe es una empresa que supone, a primera vista, dificultades casi insuperables, dada la extensión y el carácter variado del tema. Como sucede en todas las demás ciencias, el número de matemáticos y el número de trabajos dedicados a las matemáticas ha aumentado considerablemente desde finales del siglo diecinueve. Los artículos de matemáticas puras publicados en el mundo durante un año normal cubren varios miles de páginas. Claro está que no todo este material tiene el mismo valor, pero, después de haber concedido las inevitables taras, sigue siendo cierto que la ciencia matemática se ve enriquecida cada año por una masa de nuevos resultados que se extiende y ramifica firmemente en las teorías, sujetas a modificaciones basadas sobre nuevos fundamentos, comparadas y combinadas entre sí. Ningún matemático, ni siquiera si dedicase todo su tiempo a esta tarea, sería capaz de seguir todos los detalles de este desarrollo. Muchos matemáticos ocupan cuartos en una esquina del campo de las matemáticas que no pretenden abandonar, y no sólo ignoran casi todo lo que no concierne a su campo específico, sino que son incapaces de comprender el lenguaje y la terminología que utilizan sus colegas trabajando en una esquina lejana a la suya. Incluso entre aquellos que tienen la formación más amplia no hay ninguno que no se sienta perdido en ciertas regiones del inmenso mundo de las matemáticas. Aquellos que, como Poincaré o Hilbert, ponen el sello de su genio en casi todos los campos, constituyen una gran excepción incluso entre los hombres de mayor logro.

Por lo tanto, de ningún modo debe pretenderse ofrecer a los iniciados un cuadro exacto de lo que las mismas matemáticas no pueden concebir en su totalidad. No obstante esto, es legítimo preguntarse si esta exuberante proliferación hace del desarrollo un organismo fuertemente construido, que adquiere cada vez más cohesión y unidad a partir de sus nuevas ampliaciones, o si es la manifestación externa de una tendencia hacia una fragmentación progresiva, inherente a la propia naturaleza de las matemáticas, si sucede que el dominio de las matemáticas se está convirtiendo en una Torre de Babel en donde las disciplinas autónomas están cada vez más separadas unas de otras, no sólo en sus objetivos, sino también en sus métodos e inclusive en su lenguaje. En otras palabras, ¿tenemos hoy en día una matemática o tenemos varias matemáticas?

Aunque esta pregunta quizá requiere hoy en día de una respuesta más urgente que en cualquier otro momento pasado, no es, de ninguna manera, una cuestión

novedosa; ha sido planteada casi desde el inicio de la ciencia matemática. En efecto, quitando las matemáticas aplicadas, siempre ha existido un dualismo entre los orígenes de la geometría y los de la aritmética (ciertamente en sus aspectos elementales), ya que la última fue, al comienzo, una ciencia de magnitud discreta, mientras que la primera siempre ha sido una ciencia de extensión continua. Estos dos aspectos han dado lugar a dos puntos de vista opuestos desde el descubrimiento de los [números] irracionales. En efecto, es exactamente este descubrimiento el que frustró el primer intento por unificar la ciencia, a saber, la aritmetización de los pitagóricos (“todo es número”).

Nos llevaría demasiado lejos el intentar dar cuenta de las vicisitudes de la concepción unitaria de las matemáticas desde el tiempo de Pitágoras hasta nuestros días. Además, esta tarea es más propia de un filósofo que de un matemático, porque es una característica común de los distintos intentos por integrar la totalidad de las matemáticas en un todo congruente - ya sea que pensemos en Platón, en Descartes, o en Leibniz, en la aritmetización, o en los logicistas del siglo diecinueve - el que todos hayan estado conectados con un sistema filosófico más o menos amplio en su alcance, siempre comenzando por perspectivas *a priori* relativas a las relaciones de las matemáticas con el doble universo del mundo externo y del mundo del pensamiento. No podemos hacer mejor cosa que referir al lector al estudio histórico y crítico de L. Brunschvicg [1]. Nuestra tarea es mucho más modesta y menos extensa; no pretendemos examinar las relaciones de las matemáticas con la realidad ni con las categorías del pensamiento. Intentaremos permanecer dentro del campo de las matemáticas, y buscaremos una respuesta a la pregunta planteada analizando los procedimientos de las propias matemáticas.

**2. Formalismo lógico y método axiomático.** Después de la bancarrota más o menos evidente de los distintos sistemas a los que ya nos referimos, parecía que, al comienzo de este siglo, se había abandonado el concebir a las matemáticas como una ciencia caracterizada por un propósito y un método definitivamente especificados; en lugar de esto, hubo una tendencia a mirar a las matemáticas como “una colección de disciplinas basadas sobre conceptos particulares, exactamente especificados”, interrelacionados por “mil vías de comunicación”, permitiendo a los métodos de cada una de estas disciplinas fertilizar una o más de las otras [disciplinas] [1, página 447]. Actualmente, sin embargo, creemos que la evolución interna de la ciencia matemática ha provocado, a pesar de las apariencias, una unidad más cercana entre sus distintas

partes, creando así algo parecido a un núcleo central más coherente de lo que nunca ha sido. El aspecto esencial de esta evolución ha sido el estudio sistemático de las relaciones existentes entre las distintas teorías matemáticas, y ha conducido a lo que generalmente se conoce como el “método axiomático”.

Las palabras “formalismo” y “método formalista” se utilizan con frecuencia, pero es importante mantener la guardia en contra de la confusión que puede causar el uso de estas palabras mal definidas, de la cual se aprovechan muy asiduamente los oponentes del método axiomático. Todo mundo sabe que, superficialmente, las matemáticas aparecen como esta “larga cadena de razonamientos” de la cual habló Descartes; toda teoría matemática es una concatenación de proposiciones, cada una derivada de las precedentes en conformidad con las reglas de un sistema lógico, que es esencialmente el codificado, desde los tiempos de Aristóteles, bajo el nombre de “lógica formal”, convenientemente adaptada a los objetivos particulares del matemático. Es, por lo tanto, una verdad de Perogrullo decir que este “razonamiento deductivo” constituye un principio unificador de las matemáticas. Una observación tan superficial ciertamente no puede dar cuenta de la evidente complejidad de las distintas teorías matemáticas, no más de lo que uno podría, por ejemplo, unir la física y la biología en una sola ciencia sobre la base de que ambas recurren al método experimental. El método de razonamiento por medio de cadenas de silogismos no es otra cosa que un mecanismo de transformación, igualmente aplicable a un conjunto de premisas que a otro; no puede servir, por lo tanto, para caracterizar estas premisas. En otras palabras, es la forma externa que el matemático da a su pensamiento, el vehículo que lo hace accesible para los demás;<sup>1</sup> en breve, el lenguaje adaptado a las matemáticas. Esto es todo, y no debe atribuírsele más importancia. Sin duda es extremadamente útil establecer las reglas de este lenguaje, constituir su vocabulario, y clarificar su sintaxis; en realidad, esto constituye un aspecto del método axiomático, el que propiamente puede llamarse formalismo lógico (o “logicista”, como a veces se le llama). Pero nosotros enfatizamos que esto es sólo un aspecto de este método, y en realidad el menos interesante.

Lo que se propone el método axiomático como objetivo esencial es exactamente lo que el formalismo lógico, por sí mismo, no puede suministrar, a saber, la profunda inteligibilidad de las matemáticas. Así como el método experimental comienza desde la

---

<sup>1</sup> En efecto, cualquier matemático sabe que una prueba no ha sido realmente “comprendida” si uno no ha hecho nada más que verificar, paso a paso, la exactitud de las deducciones de las que está compuesta, y no ha intentado obtener una visión clara de las ideas que han llevado a la construcción de esta particular cadena de deducciones en detrimento de cualquier otra.

creencia *a priori* en la permanencia de las leyes naturales, el método axiomático tiene su piedra angular en la convicción de que, no sólo no son las matemáticas una concatenación de silogismos desarrollada al azar, sino que tampoco es una colección de trucos más o menos “astutos” a los que se llegó por combinaciones afortunadas, en donde gana el día una astucia puramente técnica. Ahí en donde el observador superficial sólo ve dos o varias teorías distintas, prestándose una a otra un “apoyo inesperado” [1, página 446] por medio de la intervención de un genio matemático, el método axiomático nos enseña a buscar las razones subyacentes para un descubrimiento de este tipo, a encontrar las ideas comunes de estas teorías, enterradas bajo la acumulación de detalles propiamente pertenecientes a cada una de ellas, a desenterrar estas ideas y a ponerlas en su luz propia.

**3. La noción de estructura.** ¿De qué forma puede hacerse esto? Es aquí en donde el método axiomático más se aproxima al método experimental. Así como este último extrae su fuerza de la fuente del cartesianismo, aquél “dividirá las dificultades para superarlas mejor”. Intentará, en las demostraciones de una teoría, separar los principales motivos de sus argumentos para después, tomando cada uno de ellos por separado y formulándolos en forma abstracta, desarrollar las consecuencias que se siguen únicamente de cada uno de ellos. Regresando después a la teoría bajo consideración, recombinará los elementos componentes que previamente habían sido separados, e indagará cómo estos distintos componentes influyen uno sobre otro. En realidad no hay nada nuevo en este clásico ir a la ida y vuelta entre el análisis y la síntesis; la originalidad del método se encuentra por completo en la manera en que es aplicado.

Para ilustrar el procedimiento que acabamos de esbozar a partir de un ejemplo, tomaremos una de las más viejas (y también una de las más sencillas) teorías axiomáticas, a saber, la de los “grupos abstractos”. Consideremos, por ejemplo, las tres operaciones siguientes: **1.** la adición de números reales, estando su suma (positiva, negativa, o cero) definida de la manera habitual; **2.** la multiplicación de números enteros “módulo un número primo  $p$ ”, (donde los elementos bajo consideración son los números enteros  $1, 2, \dots, p-1$ ) y el “producto” de dos de estos números está definido, de común acuerdo, como el residuo de la división de su producto usual entre  $p$ ; **3.** la “composición” de desplazamientos en el espacio euclidiano tridimensional, estando el “resultante” (o “producto”) de dos desplazamientos  $S, T$  (tomados en este orden)

definido como el desplazamiento que se obtiene al llevar a cabo primero el desplazamiento  $T$  y después el desplazamiento  $S$ . En cada una de estas tres teorías, uno hace corresponder - por medio de un procedimiento definido para cada teoría - a dos elementos  $x, y$  (tomados en este orden) del conjunto bajo consideración (en el primer caso el conjunto de números reales, en el segundo el conjunto de números  $1, 2, \dots, p-1$ , y en el tercer caso el conjunto de todos los desplazamientos) un tercer elemento bien determinado. Acordaremos en designar a este tercer elemento, en los tres casos, por  $x\tau y$  (será, pues, la suma de  $x$  y  $y$  si  $x$  y  $y$  son números reales, su producto “módulo  $p$ ” si son números enteros  $\leq p-1$ , y su resultante si son desplazamientos). Si ahora examinamos las diversas propiedades de esta “operación” en cada una de las tres teorías, descubriremos un paralelismo notable; pero, en cada una de las teorías por separado, las propiedades están interconectadas, y un análisis de sus conexiones lógicas nos llevará a seleccionar un pequeño número de ellas que son independientes (i. e., ninguna de ellas es una consecuencia lógica de todas las otras). Por ejemplo,<sup>2</sup> uno puede tomar las tres propiedades siguientes, que expresaremos por nuestra notación simbólica, que es común a las tres teorías, pero fácilmente traducible al lenguaje particular de cada una de ellas:

- (a) Para todos los elementos  $x, y, z$ , uno tiene  $x\tau(y\tau z) = (x\tau y)\tau z$  (“asociatividad” de la operación  $x\tau y$ );
- (b) Existe un elemento  $e$  tal que, para cada elemento  $x$ , uno tiene  $e\tau x = x\tau e = x$  (para la adición de números reales, es el número 0; para la multiplicación “módulo  $p$ ”, es el número 1; para la composición de desplazamientos, es el desplazamiento “idéntico”, que deja fijo cada punto del espacio);
- (c) Correspondiente a cada elemento  $x$ , existe un elemento  $x'$  tal que  $x\tau x' = x'\tau x = e$  (para la adición de números reales,  $x'$  es el número  $-x$ ; para la composición de desplazamientos,  $x'$  es el desplazamiento “inverso” de  $x$ , i. e., el desplazamiento que reemplaza cada punto desplazado por  $x$  a su

---

<sup>2</sup> No hay nada de absoluto en esta elección; se conocen varios sistemas de axiomas que son “equivalentes” al axioma que estamos estableciendo explícitamente, siendo los axiomas de cada uno de estos sistemas consecuencias lógicas de los axiomas de cualquier otro [sistema].

posición original; para la multiplicación “módulo  $p$ ”, la existencia de  $x'$  se sigue de un argumento aritmético muy simple).<sup>3</sup>

Se sigue entonces que las propiedades que pueden ser expresadas de la misma forma en las tres teorías por medio de la notación común son consecuencias de las tres [propiedades] precedentes. Intentemos mostrar, por ejemplo, que de  $x\tau y = x\tau z$  se sigue que  $y = z$ . Uno podría hacer esto en cada una de las teorías a partir de un razonamiento peculiar a cada una. Sin embargo, podemos proceder como sigue a partir de un método aplicable a todos los casos: de la relación  $x\tau y = x\tau z$  derivamos  $x'\tau(x\tau y) = x'\tau(x\tau z)$  ( $x'$  teniendo el mismo significado ya definido); por consiguiente, al aplicar (a),  $(x'\tau)x\tau y = (x'\tau)x\tau z$ ; por medio de (c) esta relación toma la forma  $e\tau y = e\tau z$ , y finalmente, al aplicar (b),  $y = z$ , que es lo que pretendíamos probar. En este razonamiento la naturaleza de los elementos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ha quedado fuera de toda consideración; no nos hemos ocupado en saber si son números reales, o números enteros  $\leq p-1$ , o desplazamientos. La única premisa de importancia fue que la operación  $x\tau y$  sobre estos elementos tiene las propiedades (a), (b), y (c). Aunque sólo fuese para evitar repeticiones fastidiosas, inmediatamente se ve que sería conveniente desarrollar, de una vez por todas, todas las consecuencias lógicas de las tres propiedades (a), (b), (c). Por mera conveniencia lingüística, es desde luego deseable adoptar una terminología común para los tres conjuntos. Uno dice que un conjunto en donde ha sido definida una operación  $x\tau y$  teniendo las tres propiedades (a), (b), (c) está provisto de una estructura de grupo (o, más brevemente, que es un grupo); a las propiedades (a), (b), (c) se les llama los axiomas de las estructuras de grupo, y el desarrollo de sus consecuencias constituye la creación de la teoría axiomática de los grupos.<sup>4</sup>

Ahora podemos aclarar qué debe entenderse, por lo general, por una estructura matemática. El carácter común de los distintos conceptos designados por este nombre genérico es que pueden ser aplicados a conjuntos de elementos cuya naturaleza no ha sido especificada.<sup>5</sup> Para definir una estructura, uno toma como dadas una o varias

---

<sup>3</sup> Observamos que los residuos que quedan cuando los números  $x, x^2, \dots, x^n, \dots$  son divididos entre  $p$  no pueden ser todos distintos; expresando el hecho de que dos de estos residuos son iguales, uno puede mostrar fácilmente que existe una potencia  $x^m$  de  $x$  que tiene un residuo igual a 1; si  $x'$  es el residuo de la división de  $x^{m-1}$  entre  $p$ , concluimos que el producto “módulo  $p$ ” de  $x$  y  $x'$  es igual a 1.

<sup>4</sup> Sobra decir que ya no existe conexión alguna entre esta interpretación de la palabra “axioma” y su significado tradicional de “verdad evidente [por sí misma]”.

<sup>5</sup> Aquí tomamos un punto de vista ingenuo y no nos ocupamos de las espinosas cuestiones, mitad filosóficas, mitad matemáticas, relativas al problema de la “naturaleza” de los “entes” u “objetos”



relaciones en las cuales entran estos términos<sup>6</sup> (en el caso de los grupos, esta fue la relación  $z = x\tau y$  entre tres elementos arbitrarios). Después, uno postula que la relación o relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que están explícitamente establecidas y que constituyen los axiomas de la estructura considerada).<sup>7</sup> Para establecer la teoría axiomática de una estructura dada, basta con deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, excluyendo cualquier otra hipótesis sobre los elementos bajo consideración (en particular, toda hipótesis sobre su propia naturaleza).

**4. Los grandes tipos de estructuras.** Las relaciones que forman el punto de partida para la definición de una estructura pueden ser de carácter muy distinto. La que tiene lugar en la estructura de grupo es la que se conoce como “ley de composición”, i. e., una relación entre tres elementos que determina al tercero exclusivamente como una función de los dos primeros. Cuando las relaciones que entran en la definición de una estructura son “leyes de composición”, a la estructura correspondiente se le llama estructura algebraica (por ejemplo, una estructura de campo está definida por dos leyes de composición con sus axiomas adecuados: la adición y multiplicación de números reales definen una estructura de campo sobre el conjunto de estos números).

Otro tipo importante lo proporcionan las estructuras definidas por una relación de orden; ésta es una relación entre dos elementos  $x$ ,  $y$  que se expresa con mayor frecuencia bajo la forma “ $x$  es, a lo mucho, igual a  $y$ ”, y que representaremos, en

---

matemáticos. Es suficiente con decir que los estudios axiomáticos de los siglos diecinueve y veinte han remplazado, gradualmente, al pluralismo inicial de la representación mental de estos “entes” - pensados primero como “abstracciones” ideales de las experiencias sensoriales y conservando toda su heterogeneidad - por un concepto unitario, que ha reducido de manera gradual todas las nociones matemáticas, primero al concepto de número natural, y después, en una segunda etapa, a la noción de conjunto. Este último concepto, considerado por mucho tiempo como “primitivo” e “indefinible”, ha sido objeto de un sinnúmero de polémicas, como resultado de su carácter extremadamente general y a causa del tipo sumamente vago de representación mental que supone. Las dificultades no desaparecieron hasta que desapareció la propia noción de conjunto (y con ella todos los problemas pseudometafísicos relativos a los “entes” matemáticos) a la luz del trabajo reciente sobre el formalismo lógico. Desde esta nueva perspectiva, las estructuras matemáticas se convierten, propiamente hablando, en los únicos “objetos” de las matemáticas. El lector encontrará desarrollos más completos de este punto en los artículos de J. Dieudonné [2] y H. Cartan [3].

<sup>6</sup> En realidad, esta definición de estructuras no es lo suficientemente general para las necesidades de las matemáticas; también es necesario considerar el caso en el que las relaciones que definen una estructura se mantienen no sólo entre los elementos del conjunto considerado, sino también entre las partes de este conjunto e incluso, más generalmente, entre los elementos de conjuntos de un grado “mayor” en la terminología de la “jerarquía de tipos”. Para más detalles sobre esta cuestión, véase [4].

<sup>7</sup> Estrictamente hablando, para el caso de los grupos uno debe contar entre los axiomas, además de las propiedades (a), (b), (c) ya establecidas, el hecho de que la relación  $z = x\tau y$  determina una y una sola  $z$  cuando  $x$  y  $y$  están dadas. Comúnmente, uno considera a esta propiedad como tácitamente implícita dada la forma en que está escrita la relación.

general, por  $xRy$ . De ninguna manera estamos suponiendo que esta relación determina uno de los dos elementos  $x$ ,  $y$  exclusivamente como una función del otro; los axiomas a los que está sujeta son los siguientes: (a) para cada  $x$  tenemos  $xRx$ ; (b) de las relaciones  $xRy$  y  $yRx$  se sigue que  $x = y$ ; (c) las relaciones  $xRy$  y  $yRz$  tienen como consecuencia  $xRz$ . Un ejemplo obvio de un conjunto con una estructura de este tipo es el conjunto de los números enteros (o de los números reales), en donde el símbolo  $R$  es remplazado por el símbolo  $\leq$ . Pero debe observarse que entre los axiomas no hemos incluido la siguiente propiedad, que parece ser inseparable de la noción popular de “orden”: “para cada par de elementos  $x$  y  $y$ , o bien se mantiene  $xRy$ , o bien  $yRx$ ”. En otras palabras, no está excluido el caso en donde  $x$  y  $y$  son incomparables. A primera vista esto puede parecer paradójico, pero es fácil ofrecer ejemplos de estructuras de orden muy importantes en donde tiene lugar tal fenómeno. Esto sucede cuando  $X$  y  $Y$  denotan partes del mismo conjunto y la relación  $XRY$  está interpretada para significar “ $X$  está contenida en  $Y$ ”; de nuevo, cuando  $x$  y  $y$  son números enteros positivos y  $xRy$  significa “ $x$  divide  $y$ ”; y también si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones reales definidas sobre un intervalo  $a \leq x \leq b$ , mientras que  $f(x)Rg(x)$  está interpretada para significar “para cada  $x$ ,  $f(x) \leq g(x)$ ”.

Nos gustaría decir unas cuantas palabras sobre un tercer gran tipo de estructuras, a saber, las estructuras topológicas (o topologías). Ellas proporcionan una formulación matemática abstracta de los conceptos intuitivos de vecindad, límite, y continuidad, a los cuales llegamos por nuestra idea del espacio. El grado de abstracción necesario para la formulación de los axiomas de una estructura de este tipo es decididamente mayor que en los ejemplos anteriores; el carácter del presente artículo hace necesario referir a los lectores interesados en este tema a tratados especiales. Véase, por ejemplo, [5].

**5. La estandarización de la técnica matemática.** Probablemente ya hemos dicho lo suficiente como para que el lector se forme una idea bastante precisa del método axiomático. Debe ser claro a partir de lo que precede que su característica más llamativa es efectuar una economía considerable del pensamiento. Las “estructuras” son herramientas para el matemático; tan pronto como ha reconocido entre los elementos estudiados las relaciones que satisfacen los axiomas de un tipo conocido, inmediatamente tiene a su disposición todo el arsenal de teoremas generales pertenecientes a la estructura de ese tipo. Por otro lado, previamente se vio obligado a

forjar por sí mismo los medios para atacar sus problemas, y su poder dependió de sus talentos personales. A menudo estos problemas estaban cargados de hipótesis restrictivas, resultantes de las peculiaridades del problema estudiado. Podría decirse que el método axiomático no es nada más que el “sistema de Taylor” para las matemáticas.

Sin embargo, esta es una analogía muy pobre. El matemático no trabaja como una máquina, ni como un obrero en una cinta transportadora. No podemos hacer un énfasis excesivo en el papel fundamental que en la investigación del matemático desempeña la intuición,<sup>8</sup> que no es la intuición sensitiva común y corriente, sino más bien una especie de adivinación directa (por delante de todo razonamiento) del comportamiento normal que se espera de los entes matemáticos, los que, después de una larga relación, al matemático le son tan familiares como los entes del mundo real. Ahora bien, cada estructura lleva consigo su propio lenguaje, cargado de referencias intuitivas especiales derivadas de las teorías de las que el análisis axiomático ya descrito ha derivado la estructura. Para el investigador que de pronto descubre esta estructura en los fenómenos que está estudiando es como una modulación súbita que orienta, de un solo golpe y en una dirección inesperada, el curso intuitivo de su pensamiento, y que ilumina, con una nueva luz, el paisaje matemático en el que se desenvuelve. Pensemos - para tomar un viejo ejemplo - en el progreso realizado a comienzos del siglo diecinueve por la representación geométrica de los imaginarios. Desde nuestro punto de vista, esto equivalió a descubrir, en el conjunto de los números complejos, una estructura topológica bien conocida, la del plano euclidiano, con todas las posibilidades de aplicación que suponía. En las manos de Gauss, Abel, Cauchy, y Riemann, dio nueva vida al análisis en menos de un siglo, y varios ejemplos parecidos han ido sucediéndose repetidamente durante los últimos cincuenta años: el espacio de Hilbert, y más generalmente, los espacios funcionales, que establecen estructuras topológicas en conjuntos cuyos elementos ya no son puntos, sino funciones; la teoría de los números  $p$ -ádicos de Hensel, en donde, de una forma incluso más asombrosa, la topología invade una región que hasta entonces había sido el dominio *par excellence* de lo discreto, de lo discontinuo, a saber, el conjunto de los números enteros; la medida de Haar, que amplió enormemente el campo de aplicación del concepto de integral, e hizo posible un análisis muy profundo de las propiedades de los grupos continuos. Todos estos son ejemplos decisivos del progreso matemático, de puntos de inflexión en donde un golpe de genio

---

<sup>8</sup> Como todas las intuiciones, esta intuición especial también se equivoca a menudo.

provocó una nueva orientación de una teoría al revelar la existencia de una estructura que, *a priori*, no parecía desempeñar ningún papel en ella.

**6. Un estudio general.** Tratemos ahora, guiados por el concepto axiomático, de revisar todo el universo matemático. Es claro que ya no reconoceremos el orden tradicional de las cosas que, justo como las primeras nomenclaturas de las especies animales, se limitó a poner, unas al lado de otras, las teorías que mostraban la mayor similitud externa. En lugar de los compartimentos fuertemente delimitados del álgebra, el análisis, la teoría de números, y la geometría, veremos, por ejemplo, que la teoría de los números primos es una vecina cercana de la teoría de las curvas algebraicas, o que la geometría euclidiana es colindante con la teoría de las ecuaciones integrales. El principio de organización será el concepto de una jerarquía de estructuras, yendo de lo simple a lo complejo, de lo general a lo particular.

En el centro de nuestro universo se encuentran los grandes tipos de estructuras, de los cuales ya mencionamos los principales; podemos llamarles las estructuras-madre. Existe una diversidad considerable en cada uno de estos tipos, y uno debe distinguir entre la estructura más general del tipo bajo consideración, con el número más pequeño de axiomas, y aquellas que se obtienen al enriquecer al tipo con axiomas suplementarios, desde cada uno de los cuales viene una cosecha de nuevas consecuencias. Así, la teoría de grupos contiene, más allá de las conclusiones generales válidas para todos los grupos y dependientes únicamente de los axiomas enunciados arriba, una teoría particular de grupos finitos (obtenida al añadir el axioma de que el número de elementos del grupo es finito), una teoría particular de grupos abelianos (en donde  $x\tau y = y\tau x$  para cada  $x$  y  $y$ ), así como una teoría de grupos abelianos finitos (en donde estos dos axiomas están supuestos a mantenerse simultáneamente). Del mismo modo, en la teoría de los conjuntos ordenados, uno nota en particular aquellos conjuntos (como, por ejemplo, el conjunto de los números enteros, o de los números reales) en donde cualesquiera dos elementos son comparables, y que se llaman [conjuntos] totalmente ordenados. Entre éstos, se da mayor atención a los conjuntos llamados bien ordenados (en donde, al igual que en el conjunto de los números enteros mayores a 0, cada subconjunto tiene un “elemento mínimo”). Existe una gradación análoga entre las estructuras topológicas.

Más allá de este primer núcleo aparecen las estructuras que podríamos llamar estructuras múltiples. Estas últimas suponen dos o más de las grandes estructuras-madre

de manera simultánea, no en una simple yuxtaposición (lo que no produciría nada nuevo), sino combinadas orgánicamente por uno o más axiomas que establecen una conexión entre ellas. De esta forma es que uno tiene álgebra topológica. Ésta es un estudio de las estructuras en donde al mismo tiempo tienen lugar una o más leyes de composición y una topología, conectada bajo la condición de que las operaciones algebraicas sean (para la topología considerada) funciones continuas de los elementos sobre los que operan. No menos importante es la topología algebraica, en donde ciertos conjuntos de puntos en el espacio, definidos a partir de propiedades topológicas (símplices, ciclos, etc.), son por sí mismos tomados como elementos sobre los cuales operan las leyes de composición. La combinación de las estructuras de orden y las estructuras algebraicas también es fértil en resultados, conduciendo, en una dirección, a la teoría de la divisibilidad y de los ideales, y en otra, a la integración y a la “teoría espectral” u operadores, en donde también se une la topología.

Más adelante llegamos finalmente a las teorías propiamente llamadas particulares. En estas teorías, los elementos de los conjuntos considerados, que en las estructuras generales han permanecido completamente indeterminados, adquieren una individualidad caracterizada más definida. En este punto nos fundimos con las teorías de las matemáticas clásicas, el análisis de funciones de una variable real o compleja, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la teoría de números. Pero estas teorías ya no poseen su otrora autonomía, sino que se han convertido en cruces de caminos en donde varias estructuras matemáticas más generales coinciden y actúan unas sobre otras.

Para mantener una perspectiva correcta, debemos añadir de inmediato a este rápido esbozo la observación de que debe ser visto únicamente como una aproximación muy tosca al estado real de las matemáticas tal como existen. Como lo hemos visto, el esbozo parece ser esquemático, además de estar idealizado y congelado.

Es *esquemático* porque en los procedimientos reales las cosas no suceden de una manera tan simple y sistemática como la hemos descrito. Ahí ocurren, entre otras cosas, movimientos inversos inesperados, en donde una teoría especializada, como la teoría de los números reales, presta una indispensable ayuda en la construcción de una teoría general como la topología o la integración.

Está *idealizado* porque está muy lejos de ser verdad el que en todos los campos de las matemáticas el papel de cada una de las grandes estructuras esté claramente reconocido y delimitado. En determinadas teorías (por ejemplo, en la teoría de números)

permanecen aislados numerosos resultados, que hasta ahora no ha sido posible clasificar ni conectar de una manera satisfactoria con estructuras conocidas.

Finalmente, está *congelado* porque nada está más lejos del método axiomático que una concepción estática de la ciencia. No queremos que el lector piense que hemos trazado un estado definitivo de la ciencia. Las estructuras no son inmutables, ni en número ni en sus contenidos esenciales. Es muy posible que el desarrollo futuro de las matemáticas pueda incrementar el número de estructuras fundamentales, revelando la fecundidad de nuevos axiomas o de nuevas combinaciones de axiomas. Podemos esperar avances importantes por la invención de [nuevas] estructuras, considerando el progreso que ha resultado de las estructuras conocidas actuales. Por otro lado, estas estructuras conocidas no son, de ninguna manera, edificios acabados; en realidad sería muy sorprendente si toda la esencia de los principios ya hubiese sido extraída. Es así que con estas reservas indispensables podemos llegar a ser más conscientes de la vida interna de las matemáticas, tanto en su unidad como en su diversidad. Sucede como con una gran ciudad, cuyos suburbios y distritos periféricos la invaden incesantemente y de una manera un tanto caótica en su región circundante, mientras que su centro se reconstruye de vez en cuando, cada vez de acuerdo con un plan más claramente concebido y con un orden más majestuoso, que echa abajo las viejas secciones (con sus laberintos de callejones) y que proyecta nuevas vías hacia la periferia, que resultan más directas, más amplias, y más cómodas.

**7. Regreso al pasado y conclusión.** El concepto que hemos intentado presentar en los párrafos precedentes no se formó de una sola vez. Más bien es una etapa en evolución, que ha estado progresando por más de medio siglo y que no ha estado exenta de serias oposiciones, por parte tanto de filósofos como de los mismos matemáticos. Muchos de estos últimos han sido reacios, por mucho tiempo, a ver en la axiomática algo más que una inútil y estéril herramienta lógica incapaz de fructificar teoría alguna. Esta actitud crítica probablemente se deba a un accidente puramente histórico. Los primeros tratamientos axiomáticos, y que fueron los que causaron la mayor conmoción (los de la aritmética llevados a cabo por Dedekind y por Peano, y el de la geometría euclidiana llevado a cabo por Hilbert) trataron con teorías univalentes, i. e., teorías completamente determinadas por su sistema de axiomas; por esta razón no podían ser aplicadas a ninguna teoría excepto a aquella de la cual habían sido extraídas (todo lo contrario de lo que hemos visto, por ejemplo, sobre la teoría de grupos). Si lo mismo

hubiese sido cierto para todas las otras estructuras, el reproche de esterilidad lanzado en contra del método axiomático habría estado totalmente justificado.<sup>9</sup> Pero el desarrollo futuro del método ha revelado su poder, y la repugnancia que aún encuentra aquí y allá sólo puede explicarse por la dificultad natural de la mente para admitir, al tratar con un problema concreto, que una forma de intuición - no sugerida directamente por los elementos dados y que a menudo puede llegar sólo a partir de una etapa de abstracción más alta y frecuentemente difícil - puede resultar ser igualmente fructífera.

En cuanto a las objeciones de los filósofos, éstas están relacionadas con un dominio sobre el cual, por razones de una competencia impropia, debemos cuidarnos de entrar: el gran problema de las relaciones entre el mundo empírico y el mundo matemático.<sup>10</sup> Que haya una íntima conexión entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece confirmarse por completo, de la manera más inesperada, por los descubrimientos más recientes de la física contemporánea. Pero ignoramos las razones subyacentes de este hecho (suponiendo que uno pudiese, en efecto, atribuir un significado a estas palabras), y quizá las ignoraremos por siempre. Ciertamente hay una observación sobre este punto que podría llevar a los filósofos a una mayor prudencia en el futuro: antes de los revolucionarios desarrollos de la física moderna, se dedicó una gran cantidad de esfuerzo a intentar derivar las matemáticas de las verdades experimentales, especialmente de las intuiciones espaciales inmediatas. Pero, por una parte, la física cuántica ha mostrado que esta intuición macroscópica de la realidad cubría fenómenos microscópicos de una naturaleza totalmente distinta, relacionada con campos de las matemáticas que ciertamente no habían sido pensados con el propósito de ser aplicados a la ciencia experimental. Y, por otra parte, el método axiomático ha mostrado que las “verdades” desde las cuales se esperaba desarrollar las matemáticas no eran sino aspectos especiales de conceptos generales, cuya significancia no estaba limitada a esos dominios. Por lo tanto resultó que, después de todo lo dicho y hecho, esta íntima conexión, de la que se nos pidió admirar su armoniosa necesidad interna, no

---

<sup>9</sup> También tuvo lugar, especialmente al comienzo de la axiomática, toda una cosecha de estructuras-monstruo, completamente desprovistas de aplicaciones. Su único mérito fue el de mostrar el soporte exacto de cada axioma al observar qué sucedía si uno omitía un axioma o lo transformaba [o reemplazaba]. Desde luego, existió una tentación por concluir que estos eran los únicos resultados que podían esperarse del método axiomático.

<sup>10</sup> Aquí no consideramos las objeciones que han surgido de la aplicación de las reglas de la lógica formal al razonamiento en las teorías axiomáticas; estas objeciones están relacionadas con las dificultades lógicas que se encuentran en la teoría de conjuntos. Es suficiente con señalar que estas dificultades pueden ser superadas de una manera que no deja los menores remordimientos ni dudas en cuanto a la exactitud del razonamiento. [2] y [3] son referencias valiosas para este punto.

era más que un contacto fortuito entre dos disciplinas cuyas conexiones reales están mucho más ocultas de lo que podría haberse supuesto *a priori*.

Desde el punto de vista axiomático, las matemáticas parecen un almacén de formas abstractas: las estructuras matemáticas, y sucede que ciertos aspectos de la realidad empírica- sin que nosotros sepamos por qué - encajan en estas formas como a través de una especie de preadaptación. Claro está que no puede negarse que la mayoría de estas formas tuvieron originalmente un contenido intuitivo muy definido, pero es precisamente a partir de desechar deliberadamente este contenido que ha sido posible dar a estas formas todo el poder que pueden exhibir, y prepararlas para nuevas interpretaciones, así como para el desarrollo de todo su potencial.

Es sólo a partir de este sentido de la palabra “forma” que uno puede llamar “formalismo” al método axiomático. La unidad que ofrece a las matemáticas no es la armadura de la lógica formal, la unidad de un esqueleto sin vida, sino que es el fluido nutritivo de un organismo a la altura de su desarrollo, el flexible y fértil instrumento de investigación al que han contribuido todos los grandes pensadores matemáticos desde Gauss, todos aquellos que, en palabras de Lejeune-Dirichlet, siempre han trabajado por “sustituir ideas por cálculos”.

#### Referencias

1. L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, Alcan, 1912.
2. J. Dieudonne, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, Revue Scientifique, LXXVII, 1939, pp. 224-232.
3. H. Cartan, *Sur le fondement logique des mathématiques*, Revue Scientifique, LXXXI, 1943, pp. 3-11.
4. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, libro I (fasc. de résultats), Actual. Scient. et Industr., n. 846.
5. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, libro II, introducción y capítulo I, Actual. Scient. et Industr., n. 858.