Los fundamentos de las matemáticas

Por

Frank Ramsey

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: The Foundations of Mathematics

Publicado por Martino Publishing, CT, EEUU, 2013. Martino Publishing ha otorgado a esta colección los derechos de traducción y de publicación.

PREFACIO

El objetivo de este artículo es ofrecer una exposición satisfactoria de los fundamentos de las matemáticas de acuerdo con el método general de Frege, Whitehead y Russell. Siguiendo a estas autoridades, sostengo que las matemáticas son parte de la lógica, y así pertenezco a lo que puede llamarse la escuela lógica, opuesta a las escuelas formalista e intuicionista. Por lo tanto, he tomado a *Principia Mathematica* como base para la discusión y la enmienda; y creo haber descubierto cómo, utilizando el trabajo del Sr. Ludwig Wittgenstein, puede quedar libre de las serias objeciones que han causado su rechazo por parte de la mayoría de las autoridades alemanas, quienes han abandonado por completo su línea de enfoque.

CONTENIDOS

I. INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos ocuparemos de la naturaleza general de las matemáticas puras,[1] y de cómo se distinguen de otras ciencias. Aquí hay realmente dos distintas categorías de cosas de las que debe darse una exposición – las ideas o conceptos de las matemáticas, y las proposiciones de las matemáticas. Esta distinción no es ni artificial ni innecesaria, puesto que la gran mayoría de autores sobre el tema han concentrado su atención en la explicación

[1] En el futuro, con “matemáticas” siempre entenderemos “matemáticas puras”.

de una u otra de estas categorías, y erróneamente han supuesto que inmediatamente se seguiría una explicación satisfactoria de la otra.

Así, la escuela formalista, cuyo representante más eminente es hoy en día Hilbert, se ha concentrado en las proposiciones de las matemáticas, tales como $"2+2=4"$. Han declarado que éstas son fórmulas sin sentido a ser manipuladas según ciertas reglas arbitrarias, y sostienen que el conocimiento matemático consiste en saber qué fórmulas pueden derivarse de cuáles otras consistentemente con las reglas. Siendo tales las proposiciones de las matemáticas, la exposición de sus conceptos, por ejemplo el número 2, se sigue inmediatamente. “2” es una marca sin sentido ocurriendo en estas fórmulas sin sentido. Pero, sea lo que sea lo que se piense sobre esto como una exposición de las proposiciones matemáticas, obviamente resulta inadecuado como una teoría de conceptos matemáticos; pues éstos ocurren no solamente en las proposiciones matemáticas, sino también en las de la vida diaria. Así, “2” tiene lugar no meramente en $"2+2=4"$, sino también en “Son 2 millas a la estación”, que no es una fórmula sin sentido sino una proposición significativa en la que “2” no puede concebiblemente ser una marca sin sentido. Ni tampoco puede haber ninguna duda de que “2” se utiliza en el mismo sentido en los dos casos, pues podemos utilizar $"2+2=4"$ para inferir de “Son dos millas a la estación y dos millas desde ahí al estadio” que “Son cuatro millas al estadio vía la estación”, de modo que estos significados ordinarios de dos y de cuatro están claramente involucrados en $"2+2=4"$. Así que la irremediablemente inadecuada teoría formalista es, hasta cierto punto, el resultado de considerar únicamente las proposiciones de las matemáticas y de desatender el análisis de sus conceptos, sobre los cuales puede arrojarse luz adicional por su ocurrencia fuera de las matemáticas en las proposiciones de la vida diaria.

Aparte del formalismo hay dos principales actitudes generales hacia el fundamento de las matemáticas: la de los intuicionistas o finitistas, como Brouwer y Weyl en sus artículos recientes, y la de los logicistas – Frege, Whitehead, y Russell. Las teorías de los intuicionistas ciertamente implican renunciar a muchos de los métodos más fructíferos del análisis moderno sin ninguna razón, me parece, excepto que los métodos no consiguen ajustarse a sus prejuicios privados. Por lo tanto, no pretenden ofrecer ningún fundamento para las matemáticas como las conocemos, sino sólo para un cuerpo más estrecho de la verdad que todavía no ha sido definido con claridad. Quedan los logicistas, cuyo trabajo culminó en *Principia Mathematica*. Las teorías ahí formuladas son generalmente rechazadas por razones de detalle, especialmente por las dificultades aparentemente insuperables relacionadas con el axioma de reducibilidad. Pero estos defectos de detalle me parece que resultan de un importante defecto de principio, señalado primeramente por el Sr. Wittgenstein.

La escuela lógica se ha concentrado en el análisis de los conceptos matemáticos, habiendo mostrado que son definibles en términos de un número muy pequeño de conceptos lógicos fundamentales; y, habiendo ofrecido esta exposición de los conceptos de las matemáticas, inmediatamente han deducido una exposición de las proposiciones matemáticas – a saber, que eran aquellas proposiciones verdaderas en las que únicamente ocurrían conceptos matemáticos o lógicos. Así, Russell, en *The Principles of Mathematics*,[2] define a las matemáticas puras como "la clase de todas las proposiciones de la forma '*p* implica *q*', donde *p* y *q* son proposiciones conteniendo una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni *p* ni *q* contienen ningunas constantes excepto constantes lógicas".[3] Esta reducción de las matemáticas a la lógica simbólica fue justamente descrita por el Sr. Russell como uno de los mayores descubrimientos de nuestra época;[4] pero no fue el final del asunto, como él pareció suponer, porque todavía se encontraba lejos de una concepción adecuada de la naturaleza de la lógica simbólica a la que las matemáticas habían sido reducidas. No me estoy refiriendo a su ingenua teoría de que las constantes lógicas eran nombres para objetos reales (que ya ha abandonado), sino a su creencia de que cualquier proposición que pudiese establecerse utilizando términos lógicos[5] debe ser por sí sola una proposición de la lógica o de las matemáticas.[6] Creo que la cuestión se aclara al describir la clase de proposiciones que nos ocupa como las proposiciones completamente generales, enfatizando el hecho de que no son sobre cosas o relaciones particulares, sino

---

[2] No debe confundirse con *Principia Mathematica*. La obra *The Principles of Mathematics* es anterior, y hoy en día suele considerársele como una especie de introducción a *Principia Mathematica*. Nota del Traductor.
[3] Russell, *The Principles of Mathematics* (1903), p. 3.
[4] Loc. cit., p. 5.
[5] i. e., variables y constantes lógicas.
[6] Omito aquí, como en otros lugares, la arbitraria y trivial condición de que la proposición debe ser de la forma "*p* implica *q*".

sobre algunas o todas las cosas y las relaciones. Es realmente obvio que no todas las proposiciones así son proposiciones de las matemáticas o de la lógica simbólica. Tómese, por ejemplo, "Cualesquiera dos cosas difieren de al menos treinta formas"; esta es una proposición completamente general, que podría expresarse como una implicación involucrando únicamente constantes lógicas y variables, y bien puede ser verdadera. Pero nadie podría considerarla como una verdad matemática o lógica; es absolutamente distinta de una proposición como "Cualesquiera dos cosas junto con cualesquiera otras dos cosas hacen cuatro cosas", que es una verdad lógica y no meramente una [verdad] empírica. Según nuestra filosofía podemos diferir en llamar a la primera una proposición contingente y a la segunda una proposición necesaria, o a la primera una proposición genuina y a la segunda una mera tautología; pero todos debemos concordar con que hay alguna diferencia esencial entre las dos, y que una definición de proposiciones matemáticas debe incluir no meramente su completa generalidad, sino también alguna propiedad adicional. Esto está señalado, con una referencia a Wittgenstein, en la *Introduction to Mathematical Philosophy*[7] de Russell; pero no hay rastro de ello en *Principia Mathematica*, ni el Sr. Russell parece haber entendido su tremenda importancia, por ejemplo, en la consideración de proposiciones primitivas. En el pasaje referido de *Introduction to Mathematical Philosophy*, el Sr. Russell distingue las proposiciones que pueden enunciarse en términos lógicos de aquellas que la lógica puede afirmar como verdaderas, y da a las últimas la característica adicional de que son "tautológicas" en un sentido que no puede definir. Es obvio que una definición de esta característica resulta esencial para un fundamento claro de nuestro tema, ya que la idea a ser definida es uno de los lados esenciales de las proposiciones matemáticas – su contenido y su forma. Su contenido debe estar completamente generalizado y su forma [debe ser] tautológica.

Los formalistas desatendieron todo el contenido e hicieron de las matemáticas un sin sentido, mientras que los logicistas desatendieron la forma e hicieron que las matemáticas consistieran en cualesquiera generalizaciones verdaderas; únicamente tomando en cuenta a ambos lados y considerándolas como compuestas por generalizaciones tautológicas es que podemos obtener una teoría adecuada.

[7] p. 205.

Ahora tenemos que explicar una definición de tautología que ha sido ofrecida por el Sr. Wittgenstein en su *Tractatus Logico-Philosophicus* y que forma una de sus contribuciones más importantes al tema. Al hacer esto no podemos evitar alguna explicación de su teoría de las proposiciones en general.

Debemos comenzar con la noción de una *proposición atómica*;[8] ésta es una que no podría analizarse en términos de otras proposiciones y que podría consistir sólo en nombres, sin constantes lógicas. Por ejemplo, al unir "ϕ", el nombre de una cualidad, a "a", el nombre de un individuo, y escribiendo "ϕa", tenemos una proposición atómica afirmando que el individuo tiene la cualidad. Así, si omitimos el hecho de que "Sócrates" y "sabio" son símbolos incompletos y los consideramos como nombres, "Sócrates es sabio" es una proposición atómica; pero "Todos los hombres son sabios", "Sócrates no es sabio", no son atómicas.

Ahora supóngase que tenemos, digamos, n proposiciones atómicas $p, q, r, ...$ Con respecto a su verdad o falsedad hay 2^n posibilidades últimas mutuamente excluyentes, que podríamos acomodar en una tabla como esta (T significa verdad, y F falsedad, y hemos tomado $n = 2$ por brevedad).

p	q
T	T
F	T
T	F
F	F

A estas 2^n posibilidades las llamaremos las posibilidades de verdad de las n proposiciones atómicas. Tal vez queramos elegir cualquier subconjunto de ellas, y afirmar que es una posibilidad de este subconjunto que, de hecho, se realiza – es decir, expresar nuestro acuerdo con algunas de las posibilidades y nuestro desacuerdo con el resto.

[8] Wittgenstein las llama "proposiciones elementales"; las he llamado "atómicas" con el fin de seguir al Sr. Russell al utilizar "elemental" en un sentido distinto.

Podemos hacer esto al poner marcas T y F en las posibilidades con las que acordamos y desacordamos, respectivamente. De este modo obtenemos una proposición.

Así

p	q	
T	T	F
F	T	T
T	F	T
F	F	T

es la proposición "No ambas p y q son verdaderas", o "p es incompatible con q", pues hemos permitido todas las posibilidades excepto la primera, que hemos rechazado.

Similarmente

p	q	
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

es la proposición "Si p, entonces q".

Una proposición que expresa acuerdo y desacuerdo con las posibilidades de verdad de $p, q, \ldots$ (que no necesitan ser atómicas) es llamada una función de verdad de los argumentos $p, q, \ldots$. O, más precisamente, se dice que P es la misma función de verdad de $p, q, \ldots$ que R lo es de $r, s, \ldots$ si P expresa acuerdo con las posibilidades de verdad de $p, q, \ldots$ correspondientes por la sustitución de p por r, q por $s, \ldots$ para las posibilidades de verdad de $r, s, \ldots$ con las que R expresa acuerdo. Así, "p y q" es la misma función de verdad de *p*, *q* que “*r* y *s*” lo es de *r*, *s*, en cada caso siendo la única posibilidad permitida que ambos de los argumentos sean verdaderos. El Sr. Wittgenstein ha percibido que, si aceptamos esta exposición de las funciones de verdad como expresando acuerdo y desacuerdo con posibilidades de verdad, no hay razón por la que los argumentos para una función de verdad no habrían de ser infinitos en número.[9] Ya que ningún autor anterior ha considerado a las funciones de verdad como susceptibles de más de un número finito de argumentos, esta es una innovación de la mayor importancia. Desde luego, si los argumentos son infinitos en número, no pueden ser todos enumerados y escritos por separado; pero no hay necesidad de que los enumeremos si podemos determinarlos de cualquier otro modo, como podemos hacerlo al utilizar funciones proposicionales.

Una función proposicional es una expresión de la forma “$f\hat{x}$”, que es tal que expresa una proposición cuando cualquier símbolo (de un cierto tipo lógico apropiado dependiente de *f*) es sustituido por “$\hat{x}$”. Así, “$\hat{x}$ es un hombre” es una función proposicional. Podemos utilizar funciones proposicionales para reunir el rango de proposiciones que sean todos los valores de la función para todos los valores posibles de *x*. Así, “$\hat{x}$ es un hombre” reúne todas las proposiciones “*a* es un hombre”, “*b* es un hombre”, etc. Habiendo ahora definido, por medio de una función proposicional, un conjunto de proposiciones, podemos, utilizando una notación adecuada, afirmar la suma o el producto lógico de este conjunto. De este modo, al escribir "$(x).fx$" afirmamos el producto lógico de todas las proposiciones de la forma "fx"; al escribir "$(\exists x).fx$" afirmamos su suma lógica. Así, “(x) . x es un hombre” significaría “Todo es un hombre”; “$(\exists x)$. x es un hombre”, “Hay algo que es un hombre”. En el primer caso permitimos únicamente la posibilidad de que todas las proposiciones de la forma “*x* es un hombre” son verdaderas; en el segundo excluimos únicamente la posibilidad de que todas las proposiciones de la forma “*x* es un hombre” son falsas.

[9] Así, la suma lógica de un conjunto de proposiciones es la proposición de que al menos una del conjunto es verdadera, y es irrelevante si el conjunto es finito o infinito. Por otro lado, una suma algebraica infinita no es realmente una suma en absoluto, sino un *límite*, y así no puede ser tratada como una suma excepto sujeta a ciertas restricciones.

Así, las proposiciones generales conteniendo “todos” y “algunos” resultan ser funciones de verdad para las cuales los argumentos no están enumerados sino dados de otro modo. Pero aquí debemos protegernos de un posible error. Tomemos una proposición como “Todos los hombres son mortales”; ésta no es, como a primera vista podría suponerse, el producto lógico de las proposiciones “*x* es mortal” para tales valores de *x* que son hombres. Puede mostrarse fácilmente que tal interpretación es errónea (véase, por ejemplo, *Principia Mathematica*, I, 1ª ed., p. 47, 2ª ed., p. 45). “Todos los hombres son mortales” debe interpretarse como significando “(*x*) . si *x* es un hombre, *x* es mortal”, i. e., es el producto lógico de todos los valores de la función “si *x* es un hombre, *x* es mortal”.

El Sr. Wittgenstein sostiene que todas las proposiciones son, en el sentido definido, funciones de verdad de proposiciones elementales. Esto es difícil de probar, pero por sus propios méritos es extremadamente plausible; dice que, cuando afirmamos cualquier cosa, estamos diciendo que es una, de un cierto grupo de posibilidades últimas, que se realiza, no una de las posibilidades restantes. También aplica a todas las proposiciones que podrían expresarse con el simbolismo de *Principia Mathematica*, ya que éstas se construyen desde proposiciones atómicas al utilizar primeramente conjunciones como “si”, “y”, “o”, y segundamente varios tipos de generalidad (variables aparentes). Y ambos métodos de construcción han resultado crear funciones de verdad.[10]

A partir de esta exposición vemos cuándo dos símbolos proposicionales han de ser considerados como instancias de la misma proposición – a saber, cuando expresan acuerdo y desacuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades de verdad de proposiciones atómicas.

Así, en el simbolismo de *Principia Mathematica*

$$"p \supset q : \ \sim p \ . \ \supset . \, q", \ "q \vee : p \ . \ \sim p"$$

son ambos modos más complicados de escribir “*q*”.

[10] La forma “*A* cree *p*” quizá se sugiera como dudosa. Ésta claramente no es una función de verdad de “*p*”, pero no obstante puede ser una de otras proposiciones atómicas.

Dado cualquier conjunto de *n* proposiciones atómicas como argumentos, hay 2^n posibilidades de verdad correspondientes, y por tanto 2^{2^n} subclases de sus posibilidades de verdad, y así 2^{2^n} funciones de verdad de *n* argumentos, una expresando acuerdo con cada subclase y desacuerdo con el resto. Pero entre estas 2^{2^n} hay dos casos extremos de mucha importancia: uno en el que expresamos acuerdo con todas las posibilidades de verdad, el otro en el que no expresamos acuerdo con ninguna de ellas. A una proposición del primer tipo se le llama *tautología*, a una del segundo *contradicción*. Las tautologías y las contradicciones no son proposiciones reales, sino casos degenerados. Quizá podamos aclarar esto más fácilmente si tomamos el caso más simple posible, cuando hay sólo un argumento.

La tautología es

p	
T	T
F	T

i. e., "*p* o no *p*". Esto realmente no afirma nada en absoluto; no lo deja a uno más sabio que como lo encontró. Uno no sabe nada sobre el clima si sabe que está lloviendo o que no está lloviendo.[11]

La contradicción es

p	
T	F
F	F

i. e., "*p* no es verdadera ni falsa".

[11] Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.461.

Esto es claramente autocontradictorio, y no representa un estado de cosas posible cuya existencia pueda ser afirmada.

Las tautologías y las contradicciones pueden ser de todos grados de complejidad; para ofrecer otros ejemplos, $"(x) . \phi x :\supset: \phi a"$ es una tautología, $" \sim .(\exists x).\phi x : \phi a"$ una contradicción. Claramente, al negar una contradicción obtenemos una tautología, y al negar una tautología una contradicción. Es importante ver que las tautologías no son simplemente proposiciones verdaderas, aunque para muchos propósitos pueden ser tratadas como proposiciones verdaderas. Una proposición genuina afirma algo sobre la realidad, y es verdadera si la realidad es como afirma que es. Pero una tautología es un símbolo construido para no decir nada en absoluto sobre la realidad, sino para expresar total ignorancia al concordar con cada posibilidad.

La asimilación de tautologías y contradicciones con proposiciones verdaderas y falsas, respectivamente, resulta del hecho de que las tautologías y las contradicciones pueden tomarse como argumentos para funciones de verdad justo como proposiciones ordinarias, y para determinar la verdad o la falsedad de la función de verdad, las tautologías y las contradicciones deben contarse, entre sus argumentos, respectivamente como verdaderas y falsas. Así, si "*t*" es una tautología, "*c*" una contradicción, "*t* y *p*", "Si *t*, entonces *p*", "*c* o *p*" son lo mismo que "*p*", y "*t* o *p*", "Si *c*, entonces *p*" son tautologías.

Aquí tenemos, gracias al Sr. Wittgenstein, a quien se debe todo este análisis, un sentido claramente definido de tautología; ¿pero es éste, podría preguntarse, el sentido en el que encontramos que la tautología es una característica esencial de las proposiciones de las matemáticas y de la lógica simbólica? La cuestión debe decidirse por comparación. ¿Son las proposiciones de la lógica simbólica y de las matemáticas tautologías en el sentido del Sr. Wittgenstein?

Comencemos por considerar no las proposiciones de las matemáticas, sino aquellas de *Principia Mathematica*.[12] Éstas se obtienen mediante el proceso de deducción a partir de ciertas proposiciones primitivas que caen en dos grupos: aquellas expresadas en símbolos y

[12] Hacemos esta distinción únicamente porque *Principia Mathematica* tal vez sea una interpretación incorrecta de las matemáticas; en general, pienso que es correcta.

aquellas expresadas en palabras. Aquellas expresadas en palabras son casi todas sinsentidos por la teoría de tipos, y deben reemplazarse por convenciones simbólicas. Las proposiciones primitivas reales, aquellas expresadas en símbolos, son, con una excepción, tautologías en el sentido de Wittgenstein. De modo que, ya que el proceso de deducción es tal que desde tautologías se siguen únicamente tautologías, si no fuese por un defecto toda la estructura consistiría en tautologías. El defecto es desde luego el axioma de reducibilidad, que es, como se mostrará más abajo,[13] una proposición genuina cuya verdad o falsedad es una cuestión de hecho bruto, no de lógica. No es, por tanto, una tautología en ningún sentido, y su introducción en las matemáticas es inexcusable. Pero supóngase que pudiese prescindirse de él y que *Principia Mathematica* se modificara en consecuencia; entonces ésta consistiría por completo en tautologías en el sentido de Wittgenstein. Y por lo tanto, si *Principia Mathematica* está en la dirección correcta como fundamento e interpretación de las matemáticas, es en el sentido de tautología de Wittgenstein en el que las matemáticas son tautológicas.

Pero la adecuación de *Principia Mathematica* es una cuestión de detalle; y, como hemos visto que contiene un defecto muy grave, ya no podemos estar seguros de que las matemáticas son el tipo de cosa que Whitehead y Russell suponen que es, o por lo tanto que consisten en tautologías en el sentido de Wittgenstein. No obstante, una cosa es clara: que las matemáticas no consisten en proposiciones genuinas o afirmaciones de hecho que pudiesen basarse en evidencia inductiva, como se propuso basar al axioma de reducibilidad, sino que en algún sentido son necesarias o tautológicas. En la vida real, como dice Wittgenstein, “nunca necesitamos una proposición matemática, sino que utilizamos proposiciones matemáticas *únicamente* para inferir desde proposiciones que no pertenecen a las matemáticas a otras que tampoco pertenecen a las matemáticas”.[14] Así, utilizamos $"2\times 2=4"$ para inferir de “Tengo dos centavos en cada uno de mis dos bolsillos” a “Tengo cuatro centavos en total en mis bolsillos”. $"2\times 2=4"$ no es ella misma una proposición genuina a favor de la cual pueda requerirse evidencia inductiva, sino una tautología que puede verse que es tautológica por cualquiera que pueda comprender plenamente su significado. Cuando en las matemáticas seguimos adelante, las proposiciones se vuelven

[13] Véase el capítulo V.
[14] Wittgenstein, op. cit., 6.211.

tan complicadas que no podemos ver inmediatamente que son tautológicas, y tenemos que asegurarnos de esto al deducirlas desde tautologías más obvias. Las proposiciones primitivas a las que llegamos al final deben ser tales que no podría requerirse ninguna evidencia para ellas, ya que son tautologías patentes como "Si *p*, entonces *p*". Pero las tautologías en las que consisten las matemáticas quizá resulten no ser del tipo de Wittgenstein, sino de algún otro. Su uso esencial es facilitar la inferencia lógica; esto se consigue de la manera más obvia al construir tautologías en el sentido de Wittgenstein, pues si "Si *p*, entonces *q*" es una tautología, podemos inferir lógicamente "*q*" desde "*p*", y, a la inversa, si "*q*" se sigue lógicamente de "*p*", "Si *p*, entonces *q*" es una tautología.[15] Pero es posible que hayan otros tipos de fórmulas que podrían utilizarse para facilitar la inferencia; por ejemplo, lo que podemos llamar identidades como $"a = b"$, significando que "*a*", "*b*" pueden sustituirse entre sí en cualquier proposición sin alterarla. No me refiero a sin alterar su verdad o falsedad, sino a sin alterar qué proposición es. $"2 + 2 = 4"$ bien podría ser una identidad en este sentido, porque "Tengo 2 + 2 sombreros" y "Tengo 4 sombreros" son la misma proposición, ya que concuerdan y desacuerdan con los mismos conjuntos de posibilidades de verdad últimas.

Nuestro siguiente problema es decidir si las matemáticas consisten en tautologías (en el preciso sentido definido por Wittgenstein, al que en lo que sigue confinaremos la palabra "tautología") o en fórmulas de algún otro tipo. Es bastante claro que la geometría, en la que consideramos términos como "punto", "línea" como significando cualesquiera cosas satisfaciendo ciertos axiomas, de modo que los únicos términos constantes son funciones de verdad como "o", "algunos", consiste en tautologías. Y lo mismo sería cierto para el análisis si considerásemos a los números como cualesquiera cosas satisfaciendo los axiomas de Peano. Sin embargo, tal perspectiva sería ciertamente inadecuada, porque, ya que los números del 100 en adelante satisfacen los axiomas de Peano, no tendríamos medios para distinguir "Esta ecuación tiene tres raíces" de "Esta ecuación tiene ciento tres raíces". De modo que los números deben definirse no como variables sino como constantes, y la naturaleza de las proposiciones del análisis se vuelve dudosa.

---

[15] Quizá esto pueda aclararse al observar que si "*q*" se sigue lógicamente de "*p*", $"p.\sim q"$ debe ser autocontradictorio, y por tanto $"\sim(p.\sim q)"$ es tautológico o $"p \supset q"$ es tautológico.

Creo que son tautologías, pero la prueba de esto depende de ofrecer un análisis detallado de ellas, y la refutación de cualquier otra teoría dependería de encontrar una dificultad insuperable en los detalles de su construcción. En este capítulo me propongo discutir la cuestión de un modo general, que debe ser inevitablemente algo vago e insatisfactorio. Primero intentaré explicar las grandes dificultades que debe superar una teoría de las matemáticas como tautologías, y después intentaré explicar por qué el tipo alternativo de teoría sugerido por estas dificultades parece ser irremediablemente impracticable. Después, en los siguientes capítulos, regresaré a la teoría de que las matemáticas consisten en tautologías, discutiré y rechazaré parcialmente el método ofrecido en *Principia Mathematica* para superar las dificultades, y construiré una solución alternativa y, en mi opinión, satisfactoria.

Nuestros primeros asuntos son, pues, las dificultades de la teoría de la tautología. Surgen de una característica fundamental del análisis moderno que debemos enfatizar. Esta característica puede llamarse *extensionalidad*, y las dificultades pueden explicarse como aquellas a las que nos enfrentamos si intentamos reducir un cálculo de extensiones a un cálculo de funciones de verdad. Aquí, desde luego, estamos utilizando "extensión" en su sentido lógico, en el que la extensión de un predicado es una clase, la de una relación una clase de parejas ordenadas; de modo que al llamar extensionales a las matemáticas queremos decir que tratan no con predicados sino con clases, no con relaciones en el sentido ordinario sino con correlaciones posibles, o "relaciones en extensión" como las llama el Sr. Russell. Como ejemplos de este punto tomemos tres conceptos matemáticos fundamentales – la idea de un número real, la idea de una función (de una variable real), y la idea de similitud de clases (en el sentido de Cantor).

Los números reales son definidos como segmentos de racionales; cualquier segmento de racionales es un número real, y hay $2^{\aleph_0}$ de ellos. No es necesario que el segmento esté definido por cualquier propiedad o predicado de sus miembros en algún sentido ordinario de predicado. Un número real es por tanto una extensión, e incluso puede ser una extensión sin ninguna intensión correspondiente. Del mismo modo una función de una variable real es una relación en extensión, que no necesita estar dada por ninguna fórmula o relación real.

Quizá el punto es más llamativo en la definición cantoriana de similitud. Se dice que dos clases son similares (*i. e.*, tienen el mismo número cardinal) cuando hay una relación uno-uno cuyo dominio es una clase y cuyo dominio converso es la otra. Aquí es esencial que la relación uno-uno sólo necesita ser una relación en extensión; es obvio que dos clases podrían ser similares, i. e., susceptibles de ser correlacionadas, sin que haya ninguna relación que realmente las correlacione.

Aquí hay un punto verbal que requiere ser mencionado; no utilizo la palabra "clase" para implicar un principio de clasificación, como la palabra sugiere de manera natural, sino que por una "clase" quiero decir cualquier conjunto de cosas del mismo tipo lógico. Tal conjunto, me parece, puede o no ser definible o bien por enumeración o bien como la extensión de un predicado. Si no es definible así no podemos mencionarlo por sí mismo, sino sólo tratar con él por implicación en proposiciones sobre todas las clases o algunas clases. Lo mismo es cierto para relaciones en extensión, por las cuales no meramente quiero decir las extensiones de relaciones reales, sino cualquier conjunto de parejas ordenadas. Que esta sea la noción que tiene lugar en las matemáticas me parece absolutamente claro a partir del último de los ejemplos anteriores, la definición de Cantor de similitud, donde obviamente no hay necesidad de que la relación uno-uno en extensión sea o bien finita o bien la extensión de una relación real.

Las matemáticas son, por tanto, esencialmente extensionales, y pueden ser llamadas un cálculo de extensiones, ya que sus proposiciones afirman relaciones entre extensiones. Esto, como hemos dicho, es difícil de reducir a un cálculo de funciones de verdad, a lo cual deben reducirse las matemáticas si han de consistir en tautologías; pues las tautologías son funciones de verdad de un cierto tipo especial, a saber, aquellas que concuerdan con todas las posibilidades de verdad de sus argumentos. Quizá podemos explicar más fácilmente la dificultad con un ejemplo.

Tomemos una afirmación extensional del tipo más simple posible: la afirmación de que una clase incluye a otra. En tanto que las clases estén definidas como las clases de cosas teniendo ciertos predicados ϕ y ψ, no hay ninguna dificultad. Que la clase de ψs incluya a la clase de ϕs simplemente significa que todo lo que es un ϕ es un ψ, que, como hemos visto antes, es una función de verdad. Pero hemos visto que las matemáticas también tienen que tratar (al menos aparentemente) con clases que no están dadas por predicados que definen. (Tales clases ocurren no meramente cuando son mencionadas por separado, sino también en cualquier declaración sobre “todas las clases”, “todos los números reales”.) Tomemos dos de tales clases tan simple como sea posible: la clase (*a*, *b*, *c*) y la clase (*a*, *b*). Entonces que la clase (*a*, *b*, *c*) incluya a la clase (*a*, *b*) es, en un sentido amplio, tautológico, y aparte de su trivialidad sería una proposición matemática; pero no parece ser una tautología en el sentido de Wittgenstein, es decir, un cierto tipo de función de verdad de proposiciones elementales. La manera obvia de intentar hacerla una función de verdad consiste en introducir la identidad y escribir “(*a*, *b*) está contenida en (*a*, *b*, *c*)” como $"(x):.x=a.\vee.x=b:\supset:x=a.\vee.x=b.\vee.x=c"$. Esto ciertamente parece una función de verdad tautológica cuyos últimos argumentos son valores de $"x=a","x=b","x=c"$, es decir, proposiciones como $"a=a","b=a","d=a"$. Pero éstas no son proposiciones reales en absoluto; en $"a=b"$, o bien “*a*”, “*b*” son nombres de la misma cosa, en cuyo caso la proposición no dice nada, o [nombres] de cosas distintas, en cuyo caso [la proposición] es absurda. En ningún caso es la afirmación de un hecho; sólo parece ser una afirmación real por la confusión con el caso cuando “*a*” o “*b*” no es un nombre sino una descripción.[16] Cuando “*a*”, “*b*” son ambos nombres, la única significancia que puede establecerse sobre $"a=b"$ es que indica que utilizamos “*a*”, “*b*” como nombres de la misma cosa o, de manera más general, como símbolos equivalentes.

Ésta y otras consideraciones llevaron a Wittgenstein a la opinión de que las matemáticas no consisten en tautologías, sino en lo que llamó “ecuaciones”, a las que yo preferiría llamar “identidades”. Esto es, fórmulas de la forma $"a=b"$, donde “*a*”, “*b*” son símbolos equivalentes. Hay cierta plausibilidad en una exposición así de, por ejemplo, $"2+2=4"$. Ya que “Tengo 2 + 2 sombreros”, “Tengo 4 sombreros” son la misma proposición,[17] “2 + 2” y “4” son símbolos equivalentes. Tal como está, ésta es obviamente una perspectiva ridículamente estrecha de las matemáticas, y las reducen a aritmética simple; pero es interesante ver si no podría construirse una teoría de las matemáticas con identidades como su fundamento. He pasado mucho tiempo desarrollando tal teoría, y

[16] Para una discusión más completa de la identidad, véase el siguiente capítulo.
[17] En el sentido explicado antes. Claramente no son la misma oración, pero son la misma función de verdad de proposiciones atómicas, y así, afirman el mismo hecho.

descubrí que se enfrentaba a lo que a mí me parecían dificultades insuperables. Aquí no es lugar para ofrecer un estudio detallado de este callejón sin salida, pero intentaré señalar de un modo general las obstrucciones que bloquean su salida.

Primero que nada debemos considerar qué tipo de proposiciones matemáticas habrá en tal teoría. Suponemos que el tipo más primitivo es la identidad $"a = b"$, que se vuelve una proposición real sólo si es tomada para ser no sobre las cosas significadas por "*a*", "*b*", sino sobre estos símbolos por sí mismos; entonces las matemáticas consisten en proposiciones construidas a partir de identidades por un proceso análogo a aquel por el cual las proposiciones ordinarias están construidas a partir de proposiciones atómicas; es decir, las proposiciones matemáticas son (en esta teoría), en algún sentido, funciones de verdad de identidades. Quizá esto es una exageración, y la teoría podría no afirmar que todas las proposiciones matemáticas sean de esta forma; pero es claramente una de las formas importantes que se supondría habrían de ocurrir. Así, se diría que

$$"x^2 - 3x + 2 = 0 :\supset_x .x = 2. \vee .x = 1"$$

es de esta forma, y correspondería a una proposición verbal que fue una función de verdad de las proposiciones verbales correspondientes a los argumentos $"x = 2"$, etc. De este modo, la proposición anterior equivaldría a "Si $'x^2 - 3x + 2'$ significa 0, $'x'$ significa 2 o 1". Entonces las matemáticas serían, al menos en parte, la actividad de construir fórmulas que correspondiesen de este modo a proposiciones verbales. Una teoría así sería difícil y quizá imposible de desarrollar a detalle, pero creo que hay otras razones más simples para descartarla. Éstas surgen tan pronto como dejamos de tratar a las matemáticas como una estructura aislada, y consideramos los elementos matemáticos en proposiciones no matemáticas. Por simplicidad, limitémonos a números cardinales, y supongamos conocer el análisis de la proposición de que la clase de ϕs es *n* en número $[\hat{x}(\phi x) \in n]$. Aquí ϕ puede ser cualquier predicado ordinario definiendo una clase, por ejemplo, la clase de ϕs puede ser la clase de los ingleses. Ahora tómese una proposición como "El cuadrado del número de ϕs es mayor por dos que el cubo del número de ψs". Creo que esta proposición no podemos analizarla con este tipo de forma:

$$(\exists m,n).\hat{x}(\phi x)\in m.\hat{x}(\psi x)\in n.m^2=n^3+2.$$

Es una proposición empírica, no una matemática, y es acerca de los ϕs y ψs, no acerca de símbolos; empero, en ella ocurre la pseudo-proposición matemática $m^2=n^3+2$, a la cual, de acuerdo con la teoría bajo discusión, sólo podemos darle sentido al tomarla como siendo acerca de símbolos, haciendo de este modo que toda la proposición sea parcialmente acerca de símbolos. Más todavía, al ser una proposición empírica, es una función de verdad de proposiciones elementales expresando acuerdo con aquellas posibilidades que dan números de ϕs y ψs satisfaciendo a $m^2=n^3+2$. Así, "$m^2=n^3+2$" no es, como parece ser, uno de los argumentos de verdad [truth-arguments] en la proposición anterior, sino más bien parte de la función de verdad como "~" o "$\vee$" o "$\exists$, *m. n,*" que determinan qué función de verdad de proposiciones elementales es la que estamos afirmando. La teoría-identidad de las matemáticas resulta bastante inadecuada para explicar un uso tal de $m^2=n^3+2$.

Por otro lado, la teoría-tautología haría todo lo que se requiere; de acuerdo con ella, $m^2=n^3+2$ sería una tautología para los valores de m y n que la satisfacen, y una contradicción para todos los otros valores. Así,

$$\hat{x}(\phi x)\in m.\hat{x}(\psi x)\in n.m^2=n^3+2$$

sería, para el primer conjunto de valores de *m*, *n*, simplemente equivalente a

$$\hat{x}(\phi x)\in m.\hat{x}(\psi x)\in n,$$

"$m^2=n^3+2$" siendo tautológica y por tanto superflua; y para todos los otros valores sería auto-contradictoria. De modo que

$$"(\exists m,n):\hat{x}(\phi x)\in m.\hat{x}(\psi x)\in n.m^2=n^3+2"$$

sería la suma lógica de las proposiciones

$$"\hat{x}(\phi x)\in m.\hat{x}(\psi x)\in n"$$

para todo *m*, *n* satisfaciendo $m^2 = n^3 + 2$, y de contradicciones para todo otro *m*, *n*; y entonces es la proposición que requerimos, porque en una suma lógica las contradicciones son superfluas. Así que esta dificultad, que parece letal para la teoría de la identidad, se elude por completo con la teoría de la tautología, que por tanto estamos animados a seguir y ver si no podemos encontrar una manera de superar las dificultades a las que descubrimos enfrentarnos al intentar reducir un cálculo extensional a un cálculo de funciones de verdad. En *Principia Mathematica* se procura una solución así, y la discutiremos en el siguiente capítulo; pero antes de pasar a esto debemos decir algo sobre las consabidas contradicciones de la teoría de agregados que nuestra teoría también tendrá que eludir.

No se hace notar lo suficiente, y el hecho está completamente desatendido en *Principia Mathematica*, que estas contradicciones caen en dos grupos fundamentalmente distintos, a los que llamaremos A y B. Las más conocidas se dividen como sigue:

A. (1) La clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas.

(2) La relación entre dos relaciones cuando una no tiene en sí misma a la otra.

(3) La contradicción de Burali-Forti acerca del ordinal mayor.

B. (4) "Estoy mintiendo."

(5) El menor entero no nombrable en menos de diecinueve sílabas.

(6) El menor ordinal indefinible.

(7) La contradicción de Richard.

(8) La contradicción de Weyl acerca de "heterologisch".[18]

El principio según el cual las he dividido es de fundamental importancia. El grupo A consiste en contradicciones que, si no se hiciera ninguna previsión en contra de ellas, ocurrirían en un sistema lógico o matemático por sí mismo. Involucran únicamente términos lógicos o matemáticos como clase y número, y muestran que debe haber algo mal con nuestra lógica o nuestras matemáticas. Pero las contradicciones del grupo B no son

[18] Para las primeras siete de estas contradicciones véase *Principia Mathematica*, I (1910), p. 63. Para la octava véase Weyl, *Das Kontinuum*, p. 2.

puramente lógicas, y no pueden establecerse sólo en términos lógicos; pues todas contienen alguna referencia al pensamiento, al lenguaje, o al simbolismo, que no son términos formales sino empíricos. De modo que pueden deberse no a una lógica o matemática defectuosas, sino a ideas defectuosas relativas al pensamiento y al lenguaje. Si es así, no serían relevantes para la matemática o la lógica, si por "lógica" queremos decir un sistema simbólico, aunque desde luego serían relevantes para la lógica en el sentido del análisis del pensamiento.[19]

Esta perspectiva del segundo grupo de contradicciones no es original. Por ejemplo, Peano decidió que "Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad linguistica",[20] y por tanto lo descartó. Pero una actitud así no es completamente satisfactoria. Tenemos contradicciones involucrando tanto ideas matemáticas como lingüísticas; el matemático las descarta diciendo que la falla debe yacer en los elementos lingüísticos, pero el lingüista puede igualmente bien descartarlas por la razón opuesta, y las contradicciones nunca se resolverán. La única solución que se ha ofrecido jamás,[21] la de *Principia Mathematica*, atribuyó definitivamente las contradicciones a una mala lógica, y queda a los oponentes de esta perspectiva mostrar claramente que la falla a la que se deben estas contradicciones está en lo que Peano llamó lingüística (pero que yo preferiría llamar epistemología).

II. PRINCIPIA MATHEMATICA

En el último capítulo intenté explicar las dificultades a las que se enfrenta la teoría de que las proposiciones de las matemáticas son tautologías; en este debemos discutir el intento de solución de estas dificultades que se ofrece en *Principia Mathematica*. Intentaré mostrar que esta solución tiene tres importantes defectos, y el resto de este ensayo estará dedicado a exponer una teoría modificada en la que estos defectos han sido eliminados.

[19] Estos dos significados de "lógica" se confunden con frecuencia. Realmente debería ser claro que aquellos que dicen que la matemática es lógica no están entendiendo por "lógica" la misma cosa que aquellos que definen a la lógica como el análisis y la crítica del pensamiento.

[20] *Rivista di Mat*., 8 (1906), p. 157. [El ejemplo de Richard no pertenece a la matemática, sino a la lingüística. Nota del Traductor.]

[21] Otras así llamadas soluciones son meramente excusas inadecuadas para no ofrecer una solución.

La teoría de *Principia Mathematica* es que cada clase o agregado (utilizo las palabras como sinónimos) está definida por una función proposicional – es decir, consiste en los valores de x para los cuales "ϕx" es verdadera, donde "ϕx" es un símbolo que expresa una proposición si cualquier símbolo de tipo apropiado es sustituido por "x". Esto equivale a decir que cada clase tiene una propiedad definitoria. Tomemos la clase consistiendo en a y b; ¿por qué, puede preguntarse, debe haber una función $\phi\hat{x}$ tal que "ϕa","ϕb" son verdaderas, pero todas las demás "ϕx"s son falsas? Esto se responde al ofrecer como tal una función "$x = a \,.\vee.\, x = b$". Desatendamos por el momento las dificultades relacionadas con la identidad, y aceptemos esta respuesta; nos muestra que cualquier clase finita está definida por una función proposicional construida mediante la identidad; pero con respecto a las clases infinitas nos deja exactamente donde estábamos, esto es, sin ninguna razón para suponer que todas están definidas por funciones proposicionales, pues es imposible anotar una serie infinita de identidades. A esto se responderá que una clase sólo nos puede estar dada o bien por enumeración de sus miembros, en cuyo caso debe ser finita, o bien al ofrecer una función proposicional que la defina. Así que de ningún modo podemos estar ocupados con clases o agregados infinitos, si los hay, que no estén definidos por funciones proposicionales.[22] Pero este argumento contiene un error común, pues supone que, debido a que no podemos considerar una cosa individualmente, no debemos ocuparnos de ella en absoluto. Así, aunque una clase indefinible infinita no pueda ser mencionada por sí misma, no obstante está involucrada en cualquier declaración comenzando con "Todas las clases" o "Hay una clase tal que", y si están excluidas las clases indefinibles, se alterará fundamentalmente el significado de todas esas declaraciones.

Que haya o no clases indefinibles es una cuestión empírica; ambas posibilidades son perfectamente concebibles. Pero incluso si, en realidad, todas las clases son definibles, con nuestra lógica no podemos identificar clases con clases definibles sin destruir la aprioridad y la necesidad, que son la esencia de la lógica. Pero en caso de que alguien todavía crea que por clases queremos decir clases definibles, y por "Hay una clase" [queremos decir] "Hay una clase definible", considere la siguiente ilustración. Esta ilustración no se refiere

[22] Para abreviar, llamaré "clases indefinibles" a tales clases.

exactamente a este problema, sino al correspondiente problema para dos variables – la existencia de relaciones en extensión no definibles por funciones proposicionales de dos variables. Pero esta cuestión es tan claramente análoga a la otra que las respuestas a ambas deben ser las mismas.

Considérese la proposición "$\hat{x}(\phi x) \operatorname{sm} \hat{x}(\psi x)$" (i. e., la clase definida por $\phi \hat{x}$ tiene el mismo cardinal que la definida por $\psi \hat{x}$); esto está definido para significar que hay una relación uno-uno en extensión cuyo dominio es $\hat{x}(\phi x)$ y cuyo dominio converso es $\hat{x}(\psi x)$. Ahora, si por relación en extensión queremos decir relación definible en extensión, esto significa que dos clases tienen el mismo cardinal sólo cuando hay una relación o función real $f(x, y)$ correlacionándolas término por término. Mientras que claramente lo que quiso decir Cantor, quien ofreció por primera vez esta definición, era meramente que las dos clases eran tales que podrían ser correlacionadas, no que deba haber una función proposicional que realmente las correlacione.[23] Así, las clases de ángeles masculinos y femeninos pueden ser infinitas e iguales en número, de modo que sería posible emparejar por completo a los ángeles masculinos con los femeninos sin que haya ninguna relación real, como el matrimonio, que los correlacione. La posibilidad de clases indefinibles y de relaciones en extensión es una parte esencial de la actitud extensional de las matemáticas modernas que enfatizamos en el capítulo I, y que sea omitida en *Principia Mathematica* es el primero de los tres grandes defectos de ese trabajo. El error se hace no por tener una proposición primitiva afirmando que todas las clases son definibles, sino por ofrecer una definición de clase que sólo aplica a clases definibles, de manera que todas las proposiciones matemáticas acerca de algunas o todas las clases están malinterpretadas. Esta mala interpretación no es meramente objetable por sí misma, sino que resulta especialmente perniciosa en conexión con el axioma multiplicativo, que es una tautología cuando es propiamente interpretado, pero que cuando es malinterpretado a la manera de *Principia Mathematica* se vuelve una proposición empírica significativa, lo que no hay razón para suponer. Esto se mostrará en el capítulo V.

[23] Cf. W. E. Johnson, *Logic Part II* (1922), p. 159.

El segundo defecto en *Principia Mathematica* representa un fracaso para superar no las dificultades que surgen por la extensionalidad de las matemáticas (como el primer defecto), sino aquellas que surgen por las contradicciones discutidas al final del capítulo I. Se propuso eliminar estas contradicciones con lo que se llama Teoría de Tipos, que en realidad consiste en dos partes distintas dirigidas respectivamente en contra de los dos grupos de contradicciones. Estas dos partes fueron unificadas al haber sido ambas deducidas, de una manera bastante descuidada, del "principio del círculo vicioso", pero a mí me parece esencial considerarlas por separado.

Las contradicciones del grupo A son eliminadas al señalar que una función proposicional no puede tomarse significativamente como argumento, y al dividir funciones y clases en una jerarquía de tipos de acuerdo con sus posibles argumentos. Así, la afirmación de que una clase es un miembro de sí misma no es ni verdadera ni falsa, sino insignificativa. Esta parte de la Teoría de Tipos me parece incuestionablemente correcta, y no la discutiré más.

La primera parte de la teoría, pues, distingue tipos de funciones proposicionales por sus argumentos; así, hay funciones de individuos, funciones de funciones de individuos, funciones de funciones de funciones de individuos, y así sucesivamente. La segunda parte, diseñada para enfrentarse al segundo grupo de contradicciones, requiere más distinciones entre las distintas funciones que toman los mismos argumentos, por ejemplo entre las distintas funciones de individuos. La siguiente explicación de estas distinciones está basada en la Introducción de la segunda edición de *Principia Mathematica*.

Comenzamos con proposiciones atómicas, que ya han sido explicadas en el capítulo I. De éstas podemos construir, por medio de la *jugada* (p/q = no ambas p y q son verdaderas), cualquier función de verdad de un número finito de proposiciones atómicas como argumentos. El montaje de proposiciones así obtenidas son llamadas proposiciones elementales. Al sustituir una variable por el nombre de un individuo en una o más de estas ocurrencias en una proposición elemental obtenemos una función elemental de individuos. Una *función elemental* de individuos, "$\phi\hat{x}$", es por tanto una cuyos valores son proposiciones elementales, esto es, funciones de verdad de un número finito de proposiciones atómicas. Tales funciones fueron llamadas, en la primera edición de *Principia Mathematica, funciones predicativas*. Hablaremos de ellas con su nuevo nombre, y en el siguiente capítulo utilizaremos "función predicativa" en un sentido nuevo y original, para el cual parece más apropiado. En general, una función elemental o *matriz* de una o más variables, ya sea que éstas sean individuos o no, es una cuyos valores son proposiciones elementales. Las matrices son denotadas por un signo de exclamación después del símbolo funcional. Así, $"F\,!\,(\hat{\phi}\,!\,\hat{z}, \hat{\psi}\,!\,\hat{z}, \hat{x}, \hat{y})"$ es una matriz teniendo dos individuos y dos funciones elementales de individuos como argumentos.

A partir de una función elemental "$\phi!\hat{x}$" obtenemos, como en el capítulo I, las proposiciones "$(x).\phi!x$" y "$(\exists x).\phi!x$", que afirman respectivamente la verdad de todos y de al menos uno de los valores de "$\phi!x$". Similarmente, a partir de una función elemental de dos individuos $\phi!(\hat{x}, \hat{y})$ obtenemos funciones de un individuo como $(y).\phi!(\hat{x}, y), (\exists y).\phi!(\hat{x}, y)$. Los valores de estas funciones son proposiciones como $(y).\phi!(a, y)$, que no son proposiciones elementales; por lo tanto, las propias funciones no son funciones elementales. Tales funciones, cuyos valores resultan de generalizar una matriz todos cuyos valores son individuos, son llamadas funciones de primer orden, y se escriben $\phi_1 \hat{x}$.

Supóngase que *a* es una constante. Entonces "$\phi!a$" denotará para los diversos valores de ϕ todas las diversas proposiciones elementales de las que *a* es un constituyente. Podemos así formar las proposiciones $(\phi).\phi!a, (\exists\phi).\phi!a$ afirmando respectivamente la verdad todas, y de al menos una del anterior montaje de proposiciones. De manera más general podemos afirmar, al escribir $(\phi).F!(\phi!\hat{z}), (\exists\phi).F!(\phi!\hat{z})$, la verdad de todos y de al menos uno de los valores de $F!(\phi!\hat{z})$. Claramente tales proposiciones no son elementales, de modo que una función como $(\phi).F!(\phi!\hat{z}, x)$ no es una función elemental de *x*. Se dice que una función tal involucrando la totalidad de funciones elementales es del segundo orden y se escribe $\phi_2 x$. Al adoptar la nueva variable ϕ_2 "obtendremos otras nuevas funciones

$$(\phi_2).f!(\phi_2 \hat{z}, x), \ (\exists\phi_2).f!(\phi_2 \hat{z}, x),$$

que otra vez no están entre valores para $\hat{\phi}_2 x$ (donde ϕ_2 es el argumento), porque la totalidad de valores de $\phi_2 \hat{z}$, que ahora está involucrada, es distinta de la totalidad de valores de $\phi!\hat{z}$, que estuvo involucrada anteriormente. No importa qué tanto podamos alargar el significado de ϕ, una función de *x* en la que ocurra ϕ como variable aparente tiene un significado correspondientemente alargado, de modo que, sin importar cómo pueda definirse a ϕ, $(\phi).f!(\phi\hat{z}, x)$ y $(\exists\phi).f!(\phi\hat{z}, x)$ nunca pueden ser valores para ϕx. Intentar hacer que lo sean es como intentar atrapar la sombra de uno. Es imposible obtener una variable que abarque entre sus valores a todas las posibles funciones de individuos".[24]

Por el modo en el que se usa esta distinción de funciones en órdenes de los que ninguna totalidad es posible para eludir las contradicciones del grupo B, que se muestra resultan de las ambigüedades del lenguaje con respecto a esta distinción, puede hacerse referencia a *Principia Mathematica*.[25] Aquí puede resultar suficiente aplicar el método a una contradicción no ofrecida en ese trabajo que está particularmente libre de elementos irrelevantes: me refiero a la contradicción de Weyl referente a lo "heterologisch",[26] que ahora debemos explicar. Algunos adjetivos tienen significados que son predicados de la propia palabra adjetiva; así, la palabra "corta" es corta, pero la palabra "larga" no es larga. Llamemos autológicos a los adjetivos cuyos significados son predicados de ellos, como "corta"; a los otros llamémoslos heterológicos. Ahora, ¿es "heterológico" heterológico? Si lo es, su significado no es un predicado de él; es decir, no es heterológico. Pero si no es heterológico, su significado es un predicado de él, y por tanto es heterológico. Así que tenemos una completa contradicción.

[24] *Principia Mathematica*, I, 2ª ed., (1925), p. xxxiv.
[25] *Principia Mathematica*, I, 1ª ed., (1910), p. 117.
[26] Weyl, *Das Kontinuum*, p. 2.

De acuerdo con los principios de *Principia Mathematica*, esta contradicción se resolvería como sigue. Una palabra adjetiva es el símbolo para una función proposicional, p. ej., $"\phi"$ para $\phi\hat{x}$. Sea *R* la relación de significado entre $"\phi"$ y $\phi\hat{x}$. Entonces "*w* es heterológico" es "$(\exists\phi).wR(\phi\hat{x}).\sim\phi w$". En esto, como hemos visto, la variable aparente ϕ debe tener un rango definido de valores (por ejemplo, el rango de funciones elementales) del que $Fx =: .(\exists\phi) : xR(\phi\hat{x}).\sim\phi x$ no puede ser un miembro. Así que "heterológico" o "*F*" no es en sí mismo un adjetivo en el sentido en el que $"\phi"$ lo es. No tenemos que $(\exists\phi).'F'R(\phi\hat{x})$ porque el significado de "*F*" no es una función incluida en el rango de $"\phi"$. Así que cuando lo heterológico y lo autológico están definidos sin ambigüedades, "heterológico" no es un adjetivo en el sentido en cuestión, y no es ni heterológico ni autológico, y no hay ninguna contradicción.

Así, esta teoría de una jerarquía de órdenes de funciones de individuos elude las contradicciones; pero nos deja con una dificultad casi igual de seria, porque invalida muchos argumentos matemáticos importantes que parecen contener exactamente la misma falacia que las contradicciones. En la primera edición de *Principia Mathematica* se propuso justificar estos argumentos con un axioma especial, el axioma de reducibilidad, que afirmaba que para cada función no elemental hay una función elemental equivalente.[27] No hay razón para suponer que este axioma es verdadero; y si lo fuese, esto sería un feliz accidente y no una necesidad lógica, pues no es una tautología. Esto se mostrará afirmativamente en el capítulo V; por ahora sería suficiente con señalar que no parece ser una tautología y que no hay razón para suponer que lo sea. Tal axioma no tiene lugar en las matemáticas, y cualquier cosa que no pueda probarse sin utilizarlo no puede considerarse como probada en absoluto.

Quizá vale la pena hacer notar, entre paréntesis, un punto que a veces se omite. ¿Por qué, puede preguntarse, el axioma de reducibilidad no reproduce las contradicciones que eludió la distinción entre funciones elementales y otras funciones? Porque afirma que para

[27] Dos funciones son llamadas equivalentes cuando los mismos argumentos las hacen ambas verdaderas o ambas falsas. (En alemán, *umfangsgleich*.)

cualquier función no elemental hay una función elemental equivalente, y así parece perderse lo que se ganó al hacer la distinción. Éste, no obstante, no es el caso, debido a la naturaleza peculiar de las contradicciones en cuestión; pues, como se señaló arriba, este segundo conjunto de contradicciones no son puramente matemáticas, sino que todas involucran las ideas de pensamiento o significado, en conexión con las cuales no son intercambiables funciones equivalentes (en el sentido de "equivalente" explicado antes); por ejemplo, una puede entenderse con una cierta palabra o símbolo, pero no la otra, y una puede ser definible, y no la otra.[28] Por otro lado, cualquier contradicción puramente matemática que surgiera de confundir funciones elementales y no elementales sería reinstalada por el axioma de reducibilidad, debido a la naturaleza extensional de las matemáticas, en donde sí son intercambiables funciones equivalentes. Pero ninguna contradicción así ha mostrado surgir, de modo que el axioma de reducibilidad no parece ser autocontradictorio. Estas consideraciones claramente ponen de relieve la peculiaridad de este segundo grupo de contradicciones, y hacen todavía más probable que tengan una solución psicológica o epistemológica y no una solución puramente lógica o matemática; de tal manera que hay algo mal con la exposición del asunto ofrecida en *Principia*.

Los principales métodos matemáticos que parecen requerir del axioma de reducibilidad son la inducción matemática y la sección dedekindiana, respectivamente los fundamentos esenciales de la aritmética y del análisis. El Sr. Russell ha conseguido prescindir del axioma en el primer caso,[29] pero no tiene esperanza de un éxito similar en el segundo. Así, la sección dedekindiana se deja como un método esencialmente defectuoso,

[28] El Dr. L. Chwistek parece haber pasado por alto este punto de que, si una función es definible, la función elemental equivalente no necesita también ser definible en términos de símbolos dados. En su artículo "Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik" en *Math. Zeitschrift*, 14, (1922), pp. 236-243, denota con *S* una relación muchos-uno entre los números naturales y las clases definidas por funciones definibles en términos de ciertos símbolos. Al ser $\phi\hat{z}$ una función no elemental de este tipo, concluye que debe haber un *n* tal que $nS\,\hat{z}(\phi z)$. Esto, sin embargo, es una falacia, porque por definición $nS\,\hat{z}(\phi z)$ significa

$$(\exists\psi):\psi!x \equiv_x \phi x\ .\ nS(\psi!\hat{z}),$$

y como $\psi!\hat{z}$ no es necesariamente definible en términos de los símbolos dados, no hay razón para que haya un *n* así.

[29] Véase *Principia Mathematica*, I, 2ª ed., (1925), Apéndice B.

como a menudo ha enfatizado Weyl,[30] y el análisis ordinario se desmorona en polvo. Que éstas sean sus consecuencias es el segundo defecto en la teoría de *Principia Mathematica*, y, en mi opinión, una prueba absolutamente conclusiva de que hay algo mal. Pues como no puedo aceptar el axioma de reducibilidad ni rechazar el análisis ordinario, no puedo creer en una teoría que no me ofrezca una tercera posibilidad.

El tercer defecto serio en *Principia Mathematica* es el tratamiento de la identidad. Habría de explicarse que lo que se entiende es identidad numérica, identidad en el sentido de contar como uno, no como dos. De esto se ofrece la siguiente definición:

$$'x = y . =: (\phi) : \phi ! x . \supset . \phi ! y : \mathrm{Df.}'$$ [31]

Esto es, dos cosas son idénticas si tienen todas sus propiedades elementales en común.

En *Principia* se afirma que esta definición depende del axioma de reducibilidad, porque, aparte de este axioma, dos cosas podrían tener todas sus propiedades elementales en común pero aún discrepar con respecto a funciones de mayor orden, en cuyo caso no podrían considerarse como numéricamente idénticas.[32] Aunque, como veremos, la definición ha de rechazarse por otras razones, no creo que dependa de esta manera del axioma de reducibilidad. Pues aunque rechazar el axioma de reducibilidad destruye la prueba general obvia de que dos cosas concordando con respecto a todas las funciones elementales concuerdan también con respecto a todas las otras funciones, creo que esto aún se seguiría y probablemente podría probarse en cualquier caso particular. Por ejemplo, tomemos funciones típicas del segundo orden

$$(\phi) . f !(\phi ! \hat{z}, x), \ (\exists \phi) . f !(\phi ! \hat{z}, x).$$

Entonces, si tenemos $(\phi) : \phi ! x . \equiv . \phi ! y \ (x = y)$, se sigue que $(\phi) : f !(\phi ! \hat{z}, x) . \equiv . f !(\phi ! \hat{z}, y)$, porque $f !(\phi ! \hat{z}, x)$ es una función elemental de *x*. De aquí que

[30] Véase H. Weyl, *Das Kontinuum*, y “Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik”, *Math. Zeitschrift*, 10 (1921), pp. 39-79.
[31] 13.01.
[32] *Principia Mathematica*, I, 1ª ed. (1910), 177.

$$(\phi).f!(\phi!\hat{z},x):\equiv:(\phi).f!(\phi!\hat{z},y)$$

y

$$(\exists\phi).f!(\phi!\hat{z},x):\equiv:(\exists\phi).f!(\phi!\hat{z},y).$$

Por lo tanto, rechazar el axioma de reducibilidad no conduce inmediatamente a rechazar la definición de identidad.

La objeción real a esta definición de identidad es la misma que la instada antes en contra de definir clases como clases definibles: que es una tergiversación en que no define el significado con el que realmente se utiliza el símbolo para la identidad. Esto puede verse fácilmente de la siguiente manera: la definición hace autocontradictorio que dos cosas tengan todas sus propiedades elementales en común. Empero, en realidad esto es perfectamente posible, incluso si, de hecho, nunca sucede. Tomemos dos cosas, *a* y *b*. Entonces no hay nada autocontradictorio en *a* teniendo cualquier conjunto auto-consistente de propiedades elementales, ni en *b* teniendo este conjunto, ni por tanto, obviamente, en tanto *a* como *b* teniéndolos, ni por tanto en *a* y *b* teniendo todas sus propiedades elementales en común. Entonces, ya que esto es lógicamente posible, resulta esencial tener un simbolismo que nos permita considerar esta posibilidad y que no la excluya por definición.

Es inútil lanzar la objeción de que no es posible distinguir dos cosas que tienen todas sus propiedades en común, ya que darles distintos nombres implicaría que tuvieron las distintas propiedades de tener tales nombres. Pues aunque esto es perfectamente cierto – es decir, no puedo, por la razón dada, saber de cualesquiera dos cosas particulares indistinguibles – no obstante puedo perfectamente bien considerar la posibilidad, o incluso saber, que hay dos cosas indistinguibles sin saber cuáles son. Por tomar una situación análoga: ya que en la Tierra hay más personas que cabellos en la cabeza de alguien, sé que debe haber al menos dos personas con el mismo número de cabellos, pero no sé cuáles son esas dos personas.

Estos argumentos son reforzados por el descubrimiento de Wittgenstein de que el signo de identidad no es un constituyente necesario de la notación lógica, sino que puede ser reemplazado por la convención de que diferentes signos deben tener diferentes significados. Esto se encontrará en el *Tractatus Logico-Philosophicus*, p. 139; la convención es ligeramente ambigua, pero puede hacerse definida, y entonces resulta factible aunque generalmente inconveniente. Pero incluso si no tiene otro valor, proporciona una prueba efectiva de que la identidad puede reemplazarse por una convención simbólica, y por tanto no es una función proposicional genuina, sino meramente un dispositivo lógico.

Concluimos, por consiguiente, que el tratamiento de la identidad en *Principia Mathematica* es una mala interpretación de las matemáticas, y justo como la equivocada definición de clases es particularmente desafortunada en conexión con el axioma multiplicativo, así la equivocada definición de la identidad es especialmente errónea con respecto al axioma del infinito; pues las dos proposiciones "Hay un número infinito de cosas" y "Hay un número infinito de cosas difiriendo entre sí con respecto a funciones elementales" son, como veremos en el capítulo V, extremadamente distintas.

III. FUNCIONES PREDICATIVAS

En este capítulo consideraremos la segunda de las tres objeciones que en el último capítulo hicimos a la teoría de los fundamentos de las matemáticas ofrecida en *Principia Mathematica*. Esta objeción, que quizá es la más seria de las tres, fue dirigida en contra de la Teoría de Tipos, que parecía involucrar o bien la aceptación del ilegítimo axioma de reducibilidad o bien el rechazo de un tipo tan fundamental de argumento matemático como lo es la sección de Dedekind. Vimos que esta dificultad procedía de la segunda de las dos partes en las que fue dividida la teoría, a saber, aquella parte relativa a los distintos rangos de funciones de argumentos dados, p. ej., los individuos; y debemos considerar si esta parte de la Teoría de Tipos no puede enmendarse para salir de la dificultad. Veremos que esto puede hacerse de una manera simple y directa, que es una consecuencia natural de las teorías lógicas del Sr. Wittgenstein.

Comenzaremos desde cero con una parte de su teoría de las proposiciones, sobre la cual ya dijimos algo en el primer capítulo. Ahí vimos que él explica las proposiciones en general con referencia a proposiciones atómicas, cada proposición expresando acuerdo y desacuerdo con posibilidades de verdad de proposiciones atómicas. También vimos que podíamos construir muchos símbolos distintos, todos expresando acuerdo y desacuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades. Por ejemplo,

$$'p \supset q', '\sim p . \vee . q', '\sim : p . \sim q', '\sim q . \supset . \sim p'$$

son un conjunto así, todos concordando con las tres posibilidades

$$'p.q', '\sim p.q', '\sim p. \sim q'$$

pero discordando con $'p. \sim q'$. Se dice que dos símbolos de este tipo, que expresan acuerdo y desacuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades, son instancias de la misma proposición. Son instancias de ella justo como todos los “el” en una página son instancias de la palabra “el”. Pero mientras que los “el” son instancias de la misma palabra a cuenta de su similitud física, distintos símbolos son instancias de la misma proposición porque tienen el mismo sentido, es decir, expresan acuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades. Cuando hablemos de proposiciones generalmente querremos decir los tipos de los cuales los símbolos individuales son instancias, e incluiremos tipos de los cuales puede que no haya instancias. Esto es inevitable, ya que no podemos ocuparnos de si alguien ha realmente simbolizado o afirmado una proposición, y debemos considerar todas las proposiciones en el sentido de todas las afirmaciones posibles, ya sea que hayan o no sido afirmadas.

Cualquier proposición expresa acuerdo y desacuerdo con conjuntos complementarios de posibilidades de verdad de proposiciones atómicas; a la inversa, dado cualquier conjunto de estas posibilidades de verdad, sería lógicamente posible expresar acuerdo con ellas y desacuerdo con todas las otras, y el conjunto de posibilidades de verdad determina, por tanto, una proposición. Esta proposición puede resultar extremadamente difícil de expresar en la práctica por la pobreza de nuestro lenguaje, pues carecemos tanto de nombres para muchos objetos como de métodos para hacer expresiones involucrando un número infinito de proposiciones atómicas, excepto en casos relativamente simples como

"$(x).\phi x$", que involucra al conjunto (probablemente) infinito de (en ciertos casos) proposiciones atómicas "ϕa","ϕb", etc. Sin embargo, debemos considerar proposiciones que nuestro lenguaje es inadecuado para expresar. En "$(x).\phi x$" afirmamos la verdad de todas las proposiciones posibles que serían de la forma "ϕx", ya sea que tengamos o no nombres para todos los valores de *x*. Las proposiciones generales obviamente deben ser entendidas como aplicando a todo, no meramente a todo para lo que tengamos un nombre.

Llegamos ahora a un punto de la mayor importancia en conexión con la Teoría de Tipos. En el último capítulo explicamos que se quería decir con una proposición elemental, a saber, una construida explícitamente como una función de verdad de proposiciones atómicas. Ahora tenemos que ver que, en la teoría de Wittgenstein, "elemental" no es en absoluto un adjetivo del tipo-proposición [proposition-type], sino únicamente de sus instancias. Pues un símbolo proposicional elemental y uno no elemental podrían ser instancias de la misma proposición. Así, supóngase que se hizo una lista de todos los individuos como "*a*", "*b*",…, "*z*". Entonces, si $\phi\hat{x}$ fuese una función elemental, "$\phi a.\phi b...\phi z$" sería una proposición elemental, pero "$(x).\phi x$" [sería] no elemental; pero éstas expresarían acuerdo y desacuerdo con las mismas posibilidades y por tanto serían la misma proposición. O tómese un ejemplo que realmente podría ocurrir, "ϕa" y "$\phi a : (\exists x).\phi x$", que son la misma proposición porque $(\exists x).\phi x$ no añade nada a ϕa. Pero la primera es elemental mientras que la segunda es no elemental.

De aquí que algunas instancias de una proposición puedan ser elementales y otras puedan ser no elementales, de manera tal que lo elemental no es realmente una característica de la proposición, sino de su modo de expresión. "Proposición elemental" es como "palabra hablada"; justo como la misma palabra puede ser tanto hablada como escrita, así la misma proposición puede ser tanto expresada elementalmente como no elementalmente.

Una vez hechas estas explicaciones preliminares pasemos a una teoría de funciones proposicionales. Por una función proposicional de individuos queremos decir un símbolo de la forma "$f(\hat{x},\hat{y},\hat{z},...)$" que es tal que, si en él fuesen sustituidos los nombres de cualesquiera individuos por $"\hat{x}","\hat{y}","\hat{z}",...,$ el resultado siempre sería una proposición. Esta definición necesita ser complementada con la explicación de que dos símbolos así son considerados como la misma función cuando la sustitución del mismo conjunto de nombres en uno y en otro siempre da la misma proposición. Así, si $"f(a,b,c)","g(a,b,c)"$ son la misma proposición para cualquier conjunto de *a*, *b*, *c*, $"f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})"$ y $"g(\hat{x},\hat{y},\hat{z})"$ son la misma función, incluso si tienen un aspecto muy distinto.

Una función[33] "$\phi\hat{x}$" nos da, para cada individuo, una proposición en el sentido de un tipo-proposición (que puede no tener instancias, pues podemos no haber dado un nombre al individuo). Así que la función reúne un conjunto de proposiciones cuya suma y producto lógicos afirmamos al escribir, respectivamente, $"(\exists x).\phi x","(x).\phi x"$. Este procedimiento puede ser extendido al caso de varias variables. Considérese $"\phi(\hat{x},\hat{y})"$; désele a *y* cualquier valor constante η, y $"\phi(\hat{x},\eta)"$ da una proposición cuando cualquier nombre individual es sustituido por $\hat{x}$, y es por tanto una función de una variable desde la cual podemos formar las proposiciones

$$"(\exists x).\phi(x,\eta)","(x).\phi(x,\eta)".$$

Después considérese $"(\exists x).\phi(x,\hat{y})"$; esto, como hemos visto, da una proposición cuando cualquier nombre (e. g., "η") es sustituido por "*y*", y es por tanto una función de una variable desde la cual podemos formar las proposiciones

$$(\exists y):(\exists x).\phi(x,y) \text{ y } (y):(\exists x).\phi(x,y).$$

Como hasta ahora no ha habido ninguna dificultad, intentaremos tratar a las funciones de funciones de exactamente la misma manera que hemos tratado a las funciones de individuos. Tomemos, en aras de la simplicidad, una función de una variable que es una función de individuos. Esta sería un símbolo de la forma $"f(\hat{\phi}\hat{x})"$, que se vuelve una

[33] A menos que se indique lo contrario, por "función" siempre entenderemos función proposicional.

proposición según la sustitución por "$\hat{\phi}\hat{x}$" de cualquier función de un individuo. "$f(\phi\hat{x})$" reúne entonces un conjunto de proposiciones, cada una para cada función de un individuo, desde donde expresamos la suma y el producto lógico al escribir, respectivamente, "$(\exists\phi).f(\phi\hat{x})$","$(\phi).f(\phi\hat{x})$".

Pero esta exposición padece de una desafortunada vaguedad en cuanto al rango de funciones $\phi\hat{x}$ dando los valores de $f(\phi\hat{x})$ desde donde expresamos la suma o el producto lógico. A este respecto hay una diferencia importante entre funciones de funciones y funciones de individuos que vale la pena examinar detalladamente. En realidad, parece claro que las expresiones “función de funciones” y “función de individuos” no son estrictamente análogas; pues, mientras que las funciones son símbolos, los individuos son objetos, de tal modo que para obtener una expresión análoga a “función de funciones” tendríamos que decir “función de nombres de individuos”. Por otra parte, no parece haber ninguna manera sencilla de alterar “función de funciones” como para hacerla análoga a “función de individuos”, y es justamente esto lo que ocasiona el problema. Pues el rango de valores de una función de individuos está definitivamente fijado por el rango de individuos, una totalidad objetiva de la que no se puede escapar. Pero el rango de argumentos para una función de funciones es un rango de símbolos, todos los símbolos que se vuelven proposiciones al insertar en ellos el nombre de un individuo. Y este rango de símbolos, real o posible, no está objetivamente fijado, sino que depende de nuestros métodos para construirlos, y requiere una definición más precisa.

Esta definición puede ofrecerse de dos maneras, que pueden distinguirse como el método subjetivo y el objetivo. El método subjetivo[34] es el adoptado en *Principia Mathematica*; consiste en definir el rango de funciones como todas aquellas que podrían construirse de cierto modo, en la primera instancia por el mero uso del signo “/”. Ya hemos visto cómo conduce al punto muerto del axioma de reducibilidad. Yo, por el otro lado, adoptaré el completamente original método objetivo, que nos conducirá a una teoría satisfactoria en la que no se requiere tal axioma. Este método consiste en tratar a las funciones de funciones, tanto como sea posible, del mismo modo que a las funciones de

[34] No quiero insistir en este término; únicamente lo utilizo porque no puedo encontrar uno mejor.

individuos. Los signos que pueden sustituirse como argumentos en "$\phi\hat{x}$", una función de individuos, están determinados por sus significados; deben ser nombres de individuos. Similarmente propongo determinar los símbolos que pueden sustituirse como argumentos en "$f(\hat{\phi}\hat{x})$" no por el modo de su construcción, sino por sus significados. Esto es más difícil, porque las funciones no significan objetos individuales como lo hacen los nombres, sino que tienen significado de una manera más complicada derivada de los significados de las proposiciones que son sus valores. En el fondo, el problema es fijar como valores de $f(\phi\hat{x})$ algún conjunto definido de proposiciones de modo que podamos expresar su producto y suma lógica. En *Principia Mathematica* están determinadas como todas las proposiciones que puedan ser construidas de un cierto modo. Mi método, por otro lado, consiste en desatender cómo podríamos construirlas, y en determinarlas por una descripción de sus sentidos o importancias; y al hacerlo quizá podamos incluir en el conjunto proposiciones que no tenemos modo de construir, justo como en el rango de valores de ϕx incluimos proposiciones que no podemos expresar debido a la ausencia de nombres para los individuos involucrados.

Debemos comenzar la descripción del nuevo método con la definición de una función atómica de individuos como el resultado de reemplazar por variables cualesquiera de los nombres de individuos en una proposición atómica expresada sólo mediante el uso de nombres; si un nombre ocurre más de una vez en la proposición, puede ser reemplazado por las mismas o por distintas variables, o dejado así en sus distintas ocurrencias. Así, los valores de una función atómica de individuos son proposiciones atómicas.

Después extendemos a funciones proposicionales la idea de una función de verdad de proposiciones. (Al principio, desde luego, las funciones a las que la extendemos sólo son atómicas, pero la extensión también funciona en general, de modo que la estableceré en general.) Supóngase que tenemos las funciones $\phi_1(\hat{x},\hat{y}), \phi_2(\hat{x},\hat{y})$, etc.; entonces al decir que una función $\psi(\hat{x},\hat{y})$ es una cierta función de verdad (por ejemplo, la suma lógica) de las funciones $\phi_1(\hat{x},\hat{y}), \phi_2(\hat{x},\hat{y})$, etc., y las proposiciones *p*, *q*, etc., queremos decir que cualquier valor de $\psi(x,y)$, digamos $\psi(a,b)$, es aquella función de verdad de los correspondientes valores de $\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$, etc., i. e., $\phi_1(a,b), \phi_2(a,b)$, etc., y las proposiciones *p, q*, etc. Esta definición nos permite incluir funciones entre los argumentos de cualquier función de verdad, porque siempre nos da una función única que es esa función de verdad de esos argumentos; por ejemplo, la suma lógica de $\phi_1(\hat{x}), \phi_2(\hat{x}), \ldots$ está determinada como $\psi(x)$, donde $\psi(a)$ es la suma lógica de $\phi_1 a, \phi_2 a, \ldots$, una proposición definida para cada *a*, de modo que $\psi(x)$ es una función definida. [La función] es única porque, si hubiesen dos, a saber, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$, $\psi_1(a)$ y $\psi_2(a)$ serían la misma proposición para cada *a*, y por lo tanto las dos funciones serían idénticas.

Podemos ahora ofrecer la definición más importante de esta teoría, la [definición] de una función predicativa. No utilizo este término en el sentido de *Principia Mathematica*, 1ª ed., para lo que sigo al último trabajo del Sr. Russell al utilizar “elemental”. La noción de una función predicativa es, en mi sentido, una que no tiene lugar en *Principia*, y constituye la divergencia esencial de los dos métodos de procedimiento. Una *función predicativa* de individuos es una que es cualquier función de verdad de argumentos que, ya sean finitos o infinitos en número, son todos o bien funciones atómicas de individuos o proposiciones.[35] Esto define un rango definido de funciones de individuos que es más amplio que cualquier rango que tenga lugar en *Principia*. Depende esencialmente de la noción de una función de verdad de un número infinito de argumentos; si pudiese haber sólo un número finito de argumentos, nuestras funciones predicativas serían simplemente las funciones elementales de *Principia*. Admitir un número infinito implica que no definimos el rango de funciones como aquellas que podrían construirse de cierta manera, sino que las determinamos mediante una descripción de sus significados. Han de ser funciones de verdad – no explícitamente en su apariencia, sino en su significado – de funciones y proposiciones atómicas. De este modo incluiremos muchas funciones que no tenemos manera de construir, y muchas que construimos de maneras muy diferentes. Así, suponiendo que $\phi(\hat{x},\hat{y})$ es una función atómica y *p* una proposición,

[35] Después de “proposiciones” pudimos insertar “atómicas” sin estrechar el sentido de la definición. Pues cualquier proposición es una función de verdad de proposiciones atómicas, y una función de verdad de una función de verdad es otra vez una función de verdad.

$$\phi(\hat{x}, \hat{y}),\ \phi(\hat{x}, \hat{y}). \vee .p,\ (y).\phi(\hat{x}, y)$$

son todas funciones predicativas. [La última es predicativa porque es el producto lógico de las funciones atómicas $\phi(\hat{x}, y)$ para distintos valores de *y*.]

Para funciones de funciones hay definiciones más o menos análogas. Primero, una función atómica de funciones (predicativas)[36] de individuos y de individuos sólo puede tener un argumento funcional, digamos ϕ, pero puede tener muchos argumentos individuales *x*, *y*, etc., y debe ser de la forma $\phi(x, y, ..., a, b, ...)$, donde "*a*", "*b*", … son nombres de individuos. En particular, una función atómica $f(\phi\hat{z})$ es de la forma ϕa. Una función predicativa de funciones (predicativas) de individuos y de individuos es una que es una función de verdad cuyos argumentos son todos o bien proposiciones o funciones atómicas de funciones de individuos y de individuos,

p. ej., $\hat{\phi} a. \supset .\hat{\psi} b : \vee : p$ (una función de ϕ, ψ),

$(x).\hat{\phi} x,$ el producto lógico de las funciones atómicas $\hat{\phi} a, \hat{\phi} b,$ etcétera.

Es claro que una función solamente ocurre en una función predicativa mediante sus valores. De esta manera podemos proceder a definir funciones predicativas de funciones de funciones, y así hasta cualquier orden.

Ahora considérese una proposición como $(\phi). f(\phi\hat{x})$, donde $f(\hat{\phi}\hat{x})$ es una función predicativa de funciones. Entendemos el rango de valores de ϕ como todas las funciones predicativas; i. e., $(\phi). f(\phi\hat{x})$ es el producto lógico de las proposiciones $f(\phi\hat{x})$ para cada función predicativa, y como esto es un conjunto definido de proposiciones, hemos adjuntado a $(\phi). f(\phi\hat{x})$ un significado definido.

---

[36] Pongo "predicativas" entre paréntesis porque las definiciones aplican igualmente bien a las funciones no predicativas que trataremos en el siguiente capítulo.

Ahora considérese la función de x, $(\phi).f(\phi\hat{z},x)$. ¿Es ésta una función predicativa? Es el producto lógico de las funciones proposicionales de x, $f(\phi\hat{z},x)$ para las distintas ϕs que, como f es predicativa, son funciones de verdad de ϕx y proposiciones posiblemente variables en ϕ pero constantes en x (por ejemplo, ϕa). Las ϕxs, ya que las ϕs son predicativas, son funciones de verdad de funciones atómicas de x. Entonces las funciones proposicionales de x, $f(\phi\hat{z},x)$ son funciones de verdad de funciones atómicas de x y proposiciones. Entonces son funciones predicativas, y por tanto su producto lógico $(\phi).f(\phi\hat{z},x)$ es predicativo. De manera más general es claro que, por generalización, sea cual sea el tipo de la variable aparente, nunca podemos crear funciones no-predicativas; pues la generalización es una función de verdad de sus instancias, y, si éstas son predicativas, así lo es ella.

Así, todas las funciones de individuos que ocurren en *Principia* son predicativas en nuestro sentido y están incluidas en nuestra variable ϕ, de modo que desaparece toda necesidad de un axioma de reducibilidad.

Pero, se objetará, seguramente aquí hay un círculo vicioso; uno no puede incluir a $F\hat{x} = (\phi) \,.\, f(\phi\hat{z},\hat{x})$ entre las ϕs, porque ya presupone la totalidad de las ϕs. Sin embargo, esto no es realmente un círculo vicioso. La proposición Fa es ciertamente el producto lógico de las proposiciones $f(\phi\hat{z},a)$, pero expresarla así (que es la única manera en la que podemos) es meramente describirla de un cierto modo, con referencia a una totalidad de la cual puede ella misma ser un miembro, justo como podemos referirnos a un hombre como el más alto en un grupo, identificándolo así por medio de una totalidad de la cual él mismo es un miembro, sin que haya ningún círculo vicioso. En su significado, esto es, el hecho que afirma ser el caso, la proposición Fa no involucra la totalidad de funciones; es simplemente nuestro símbolo el que la involucra. Para tomar un caso particularmente simple: $(\phi).\phi a$ es el producto lógico de las proposiciones ϕa, de las cuales es una; pero esto no es más notable ni más vicioso que el hecho de que $p.q$ es el producto lógico del conjunto $p, q, p.q,$ del cual es un miembro. La única diferencia es que, debido a nuestra incapacidad para escribir proposiciones infinitamente largas, lo que es lógicamente un mero accidente, $(\phi).\phi a$ no puede, como $p.q$, expresarse elementalmente, sino que debe expresarse como el producto lógico de un conjunto del cual también es un miembro. Si tuviésemos infinitos recursos y pudiésemos expresar todas las funciones atómicas como $\psi_1 x, \psi_2 x$, entonces podríamos formar todas las proposiciones ϕa, es decir, todas las funciones de verdad de $\psi_1 a, \psi_2 a,$ etc., y entre ellas habría una que fuese el producto lógico de todas ellas, incluyendo ella misma, justo como $p.q$ es el producto de $p, q, p \vee q, p.q.$ Esta proposición, que no podemos expresar directamente, esto es, elementalmente, la expresamos indirectamente como el producto lógico de todas ellas al escribir $"(\phi).\phi a"$. Este proceso es ciertamente tortuoso, pero claramente no hay nada vicioso en él.

En esto yace la gran ventaja de mi método sobre el de *Principia Mathematica*. En *Principia*, el rango de ϕ es el de funciones que pueden expresarse elementalmente, y como $(\phi).f(\phi!\hat{z}, x)$ no puede expresarse así, no puede ser un valor de $\phi!$; pero yo defino los valores de ϕ no por cómo pueden expresarse, sino por qué tipo de sentidos tienen sus valores, o mejor, por cómo los hechos que afirman sus valores están relacionados con sus argumentos. Así, incluyo funciones que no podríamos expresar en absoluto, ya no digamos elementalmente, sino sólo por un ser con un sistema simbólico infinito. Y siendo realmente predicativa cualquier función formada por generalización, ya no hay ninguna necesidad de un axioma de reducibilidad.

Queda por mostrar que mi noción de funciones predicativas no nos lleva a ninguna contradicción. Todas las contradicciones relevantes, como señalé antes, contienen alguna palabra como “significa”, y mostraré que se deben a una ambigüedad esencial de tales palabras, y no a alguna debilidad en la noción de una función predicativa.

Tomemos primero la contradicción de Weyl acerca de lo “heterológico”, que discutimos en el último capítulo. Es claro que la solución ofrecida ahí ya no nos está disponible. Pues, como antes, si R es la relación de significado entre “ϕ” y $\phi\hat{x}$, “x es heterológica” es equivalente a $"(\exists\phi):xR(\phi\hat{z}).\sim\phi x"$, el rango de ϕ estando aquí entendido para ser el de funciones predicativas. Entonces

$$(\exists\phi):xR(\phi\hat{z}).\sim\phi x,$$

que llamaré *Fx*, es ella misma una función predicativa.

Así

$$'F'R(F\hat{x})$$

y

$$(\exists\phi):'F'R(\phi\hat{x}),$$

y por lo tanto

$$F('F').\equiv.\sim F('F'),$$

que es una contradicción.

Se verá que la contradicción depende esencialmente de deducir $(\exists\phi):'F'R(\phi\hat{x})$ de $'F'R(F\hat{x})$. De acuerdo con *Principia Mathematica* esta deducción es ilegítima porque $F\hat{x}$ no es un valor posible de $\phi\hat{x}$. Pero si el rango de $\phi\hat{x}$ es el de funciones predicativas, esta solución falla, porque $F\hat{x}$ es ciertamente una función predicativa. Pero obviamente hay otra posible solución: negar $'F'R(F\hat{x})$, la premisa de la deducción. $'F'R(F\hat{x})$ dice que $'F'$ significa $F\hat{x}$. Ahora, esto es ciertamente verdadero para algún significado de “significa”, de modo que para defender nuestra negación debemos mostrar alguna ambigüedad en el significado de significado, y decir que el sentido en el que $'F'$ significa $F\hat{x}$, i. e., en el que “heterológico” significa heterológico, no es el sentido denotado por “*R*”, i. e., el sentido que ocurre en la definición de heterológico. Podemos mostrar fácilmente que esto es realmente el caso, de modo que la contradicción se debe simplemente a una ambigüedad en la palabra "significado" y no tiene ninguna relevancia para las matemáticas.

Antes que nada, hablar de $'F'$ como significando $F\hat{x}$ debe parecer muy extraño en vista de nuestra definición de una función proposicional como ella misma un símbolo. Pero la expresión es meramente elíptica. El hecho que intentamos describir en estos términos es que hemos elegido arbitrariamente la letra $'F'$ para un cierto propósito, de modo que $'Fx'$ tendrá un cierto significado (dependiente de *x*). Como resultado de esta elección, $'F'$, otrora no significante, se vuelve significante; tiene significado. Pero claramente es una simplificación imposible suponer que hay un solo objeto *F* que significa. Su significado es más complicado que ese, y debe ser investigado.

Tomemos el caso más simple, una proposición atómica escrita por completo, $'aSb'$, donde "*a*", "*b*" son nombres de individuos y "*S*" es el nombre de una relación. Entonces "*a*", "*b*", "*S*" significan, de la manera más simple, los objetos separados *a*, *b*, y *S*. Ahora supóngase que definimos

$$\phi x \;.=.\; aSx \quad \text{Def.}$$

Entonces "ϕ" es sustituido por "*aS*" y no significa un solo objeto, sino que tiene significado de una manera más complicada en virtud de una relación de tres términos tanto con *a* como con *S*. Entonces podemos decir que "ϕ" significa $aS\hat{x}$, queriendo decir con esto que "ϕ" tiene esta relación con *a* y *S*. Podemos extender esta consideración para tratar con cualquier función elemental, esto es, decir que "$\phi!$" significa $\phi!\hat{x}$ significa que "$\phi!$" está relacionado de cierto modo con los objetos *a*, *b*, etc., involucrados en $\phi!\hat{x}$.

Pero supóngase que ahora tomamos un símbolo funcional no elemental, por ejemplo,

$$\phi_1 x \;:=:\; (y) \,.\, yRx \quad \text{Def.}$$

Aquí los objetos involucrados en $\phi_1 \hat{x}$ incluyen todos los individuos como valores de *y*. Y es claro que "ϕ_1" no está en absoluto relacionada con ellos del mismo modo que "ϕ!" lo está con los objetos en su significado. Porque "ϕ!" está relacionada con *a*, *b*, etc., al ser la abreviatura de una expresión conteniendo nombres de *a*, *b*, etc. Pero "ϕ_1" es la abreviatura de una expresión no conteniendo "*a*", "*b*",…, sino conteniendo únicamente una variable aparente de la que éstos pueden ser valores. Claramente "ϕ_1" significa lo que significa de una manera muy distinta y más complicada de aquella en la que significa "ϕ!". Por supuesto, justo como "elemental" no es realmente una característica de la proposición, no es realmente una característica de la función; en otras palabras, $\phi_1 \hat{x}$ y $\phi ! \hat{x}$ pueden ser la misma función, porque $\phi_1 x$ siempre es la misma proposición que $\phi ! x$. Entonces "ϕ_1","ϕ!" tendrán el mismo significado, pero lo significarán, como vimos arriba, en sentidos muy distintos de significado. Similarmente "ϕ_2", que involucra una variable aparente funcional, significará de un modo distinto y todavía más complicado.[37]

Por lo tanto, en la contradicción que estábamos discutiendo, si "*R*", el símbolo de la relación de significado entre "ϕ" y $\phi \hat{x}$, ha de tener algún significado definido, "ϕ" sólo puede ser un símbolo de un cierto tipo significando de un cierto modo; supóngase que limitamos "ϕ" a ser una función elemental al tomar *R* a ser la relación entre "ϕ!" y $\phi ! \hat{x}$.

Entonces "Fx" o "$(\exists\phi) : xR(\phi \hat{z}) . \sim \phi x$" no es elemental, sino que es una "ϕ_2".

Por lo tanto, "*F*" significa no en el sentido de significado denotado por "*R*" apropiado a "ϕ!"s, sino en aquel apropiado a "ϕ_2", de modo que tenemos $\sim : 'F' R(F \hat{x})$, que, como explicamos arriba, resuelve la contradicción para este caso.

El punto esencial a entender es que la razón por la que

---

[37] Aquí, el rango de la variable aparente en "ϕ_2" es el conjunto de funciones predicativas, no, como en *Principia Mathematica*, el conjunto de funciones elementales.

$$(\exists\phi):{}'F'R(\phi\hat{x})$$

puede ser verdadera solamente si $'F'$ es una función elemental no es porque el rango de ϕ sea aquel de funciones elementales, sino porque un símbolo no puede tener *R* con una función a menos que él (el símbolo) sea elemental. La limitación no viene de $"\exists\phi"$, sino de $"R"$. Las distinciones de $"\phi!"$s, $"\phi_1"$s, y $"\phi_2"$s aplican a los símbolos y a cómo significan, pero no a lo que significan. Por ello, (en esta sección) siempre encerré $"\phi!"$, $"\phi_1"$ y $"\phi_2"$ en comillas.

Pero puede objetarse que esta es una solución incompleta; pues supóngase que tomamos para *R* la suma de las relaciones apropiadas a $"\phi!"$s, $"\phi_1"$s, y $"\phi_2"$s. Entonces "*F*", como todavía contiene únicamente a $\exists\phi$,[38] es todavía una $"\phi_2"$, y en este caso debemos tener $'F'R(F\hat{x})$, lo que destruye nuestra solución.

Pero esto no es así porque la complejidad extra involucrada en la nueva *R* hace de "*F*" no una $"\phi_2"$, sino un símbolo todavía más complicado. Pues con esta nueva *R*, para la cual $'\phi_2'R(\phi_2\hat{x})$, ya que $"\phi_2 x"$ es de una forma tal como $(\exists\phi).f(\phi\hat{z},x)$, en $(\exists\phi).{}'F'R(\phi\hat{x})$ está involucrada al menos una función variable $f(\phi\hat{z},x)$ de funciones de individuos, pues ésta está involucrada en la noción de una variable $"\phi_2"$, que está involucrada en la variable ϕ tomada en conjunción con *R*. Pues si cualquier cosa tiene *R* con la función predicativa $\phi\hat{x}$, $\phi\hat{x}$ debe ser expresable o por una $"\phi!"$ o una $"\phi_1"$ o una $"\phi_2"$.

Por lo tanto, $(\exists\phi).{}'F'R(\phi\hat{x})$ implica no meramente la variable ϕ (función predicativa de un individuo), sino también una variable escondida f (función de una función de un individuo y de un individuo). Entonces "*Fx*" o $"(\exists\phi):xR(\phi\hat{x}).\sim\phi x"$ no es

[38] El rango de ϕ en $\exists\phi$ es aquel de funciones predicativas, incluyendo todas las $"\phi_1"$s, $"\phi_2"$s, etc., de modo que no se ve alterado por cambiar *R*.

una "ϕ_2", sino lo que podemos llamar una "ϕ_3", i. e., una función de individuos involucrando una función variable de funciones de individuos. (Esto, desde luego, no es la misma cosa que una "ϕ_3" en el sentido de *Principia Mathematica*, 2ª edición.) Por consiguiente, "*F*" significa de un modo más complicado todavía no incluido en *R*; y no tenemos $'F'R(F\hat{x})$, de modo que la contradicción desparece otra vez.

Lo que parece claro a partir de las contradicciones es que no podemos obtener una relación de significado totalmente inclusiva [all-inclusive] para funciones proposicionales. Sea cual sea la que tomemos, hay todavía un modo de construir un símbolo para significar de una manera no incluida en nuestra relación. Los significados del significado forman una totalidad ilegítima.

Por el proceso arriba comenzado obtenemos una jerarquía de proposiciones y una jerarquía de funciones de individuos. Ambas están basadas en la jerarquía fundamental de individuos, funciones de individuos, funciones de funciones de individuos, etc. A una función de individuos la llamaremos una función de tipo 1; a una función de funciones de individuos, una función de tipo 2, y así sucesivamente.

Ahora construimos como sigue la jerarquía de proposiciones:

Proposiciones de orden 0 (elementales), no conteniendo ninguna variable aparente.

“” “” “” 1, conteniendo una variable aparente individual.

Proposiciones de orden 2, conteniendo una variable aparente cuyos valores son funciones de tipo 1.

“” “” “” *n*, conteniendo una variable aparente cuyos valores son funciones de tipo $n-1$.

De esta jerarquía deducimos otra jerarquía de funciones, desconsiderando sus tipos, de acuerdo con el orden de sus valores.

Así, funciones de orden 0 (matrices) no contienen ninguna variable aparente;

“” “” “” 1 contienen una variable aparente individual,

y así sucesivamente; i. e., los valores de una función de orden *n* son proposiciones de orden *n*. Para esta clasificación, los tipos de las funciones son irrelevantes.

Debemos enfatizar la esencial distinción entre orden y tipo. El tipo de una función es una característica real de ella dependiente de los argumentos que pueda tomar; pero el orden de una proposición o función no es una característica real, sino lo que Peano llamó una pseudo-función. El orden de una proposición es como el numerador de una fracción. Justo como de “$x = y$” no podemos deducir que el numerador de *x* es igual al numerador de *y*, del hecho de que “*p*” y “*q*” sean instancias de la misma proposición no podemos deducir que el orden de “*p*” es igual al de “*q*”. Esto se mostró arriba para el caso particular de proposiciones elementales y no elementales (órdenes 0 y >0), y obviamente vale de manera general. El orden es sólo una característica de un símbolo particular que es una instancia de la proposición o función.

Ahora mostraremos brevemente cómo esta teoría resuelve las contradicciones restantes del grupo B.[39]

(*a*) “Estoy mintiendo”.

Esto habríamos de analizarlo como

$$'(\exists "p", p): \text{ Estoy diciendo } "p"."p" \text{ significa } p. \sim p'.$$

Aquí, para obtener un significado definido de *significa*[40] es necesario limitar de alguna manera el orden de $'p'$. Supóngase que $'p'$ ha de ser del *n*-ésimo o menor orden. Entonces al simbolizar con ϕ_n una función de *tipo n*, $'p'$ puede ser $(\exists \phi_n).\phi_{n+1}(\phi_n)$.

[39] No está de más repetir que para las contradicciones del grupo A mi teoría preserva las soluciones dadas en *Principia Mathematica*.

[40] Cuando digo “$'p'$ significa *p*”, no supongo que haya un único objeto *p* significado por $'p'$. El significado de $'p'$ es que se realiza una de un cierto conjunto de posibilidades, y este significado resulta de las relaciones de significado [meaning-relations] de los signos separados en $'p'$ con los objetos reales de los que trata. Son estas relaciones de significado las que varían con el orden de $'p'$. Y el orden de $'p'$ está limitado no porque *p* en $(\exists p)$ esté limitado, sino por “significa”, que varía en significado con el orden de $'p'$.

Por lo tanto, $\exists ' p '$ involucra $\exists \phi_{n+1}$, y "Estoy mintiendo" en el sentido de "Estoy afirmando una proposición falsa de orden *n*" es al menos de orden $n+1$ y no se autocontradice.

(*b*) (1) El menor entero no nombrable con menos de diecinueve sílabas.

(2) El menor ordinal indefinible.

(3) La paradoja de Richard.

Todas estas [contradicciones] resultan de la obvia ambigüedad de "nombrar" y "definir". El nombre o la definición es en cada caso un símbolo funcional que es sólo un nombre o definición por significar algo. El sentido en el que significa debe precisarse al fijar su orden; el nombre o la definición involucrando todos los nombres o definiciones así será de un orden mayor, y esto elimina la contradicción. Mis soluciones a estas contradicciones son obviamente muy similares a las de Whitehead y Russell, yaciendo la diferencia entre ellas meramente en nuestras distintas concepciones del orden de proposiciones y funciones. Para mí, las proposiciones en sí mismas no tienen órdenes; solamente son distintas funciones de verdad de proposiciones atómicas – una totalidad definida, dependiendo únicamente de qué proposiciones atómica haya. Los órdenes y las totalidades ilegítimas solamente entran con los símbolos que utilizamos para simbolizar los hechos de maneras variadamente complicadas.

Para resumir: en este capítulo he definido un rango de funciones predicativas que elude la contradicción y nos permite olvidarnos del axioma de reducibilidad. Y he ofrecido una solución a las contradicciones del grupo B que descansa sobre y explica el hecho de que todas contienen algún elemento epistémico.

IV. Funciones Proposicionales en Extensión

Antes de seguir, echemos un vistazo y veamos dónde hemos llegado. Hemos visto que la introducción de la noción de una función predicativa nos ha proporcionado un rango para ϕ que nos permite prescindir del axioma de reducibilidad. Por lo tanto, elimina el segundo y más importante defecto de la teoría de *Principia Mathematica*; pero, ¿cómo estamos ahora con respecto a las otras dos dificultades, la dificultad de incluir todas las clases y relaciones en extensión y no meramente las definibles, y la dificultad relacionada con la identidad?

Nos podemos deshacer de la dificultad acerca de la identidad a costa de un gran inconveniente, al adoptar la convención de Wittgenstein, que nos permite eliminar "=" de cualquier proposición en la que ocurra. Pero esto nos pone en una posición desesperada con respecto a las clases, porque, habiendo eliminado "=" por completo, ya no podemos utilizar $x = y$ como una función proposicional al definir clases finitas. De modo que las únicas clases con las que ahora podemos tratar son aquellas definidas por funciones predicativas.

Aquí puede resultar útil repetir la definición de una función predicativa de individuos; es cualquier función de verdad de funciones atómicas y proposiciones atómicas. Llamamos "predicativas" a tales funciones porque corresponden, tanto como una noción precisa puede [corresponder] a una [noción] vaga, a la idea de que ϕa predica la misma cosa de *a* que ϕb predica de *b*. Incluyen todas las funciones proposicionales que ocurren en *Principia Mathematica*, incluyendo la identidad como está definida ahí. Sin embargo, es obvio que no debemos definir la identidad de este modo como acuerdo con respecto a todas las funciones predicativas, porque dos cosas pueden claramente acordar con respecto a todas las funciones atómicas y por tanto con respecto a todas las funciones predicativas, y empero son dos cosas y no, como implicaría la definición de identidad propuesta, una cosa.

Consecuentemente, nuestra teoría es tan inadecuada como *Principia Mathematica* para proporcionar una lógica extensional; de hecho, si rechazamos esta falsa definición de identidad, no podemos incluir, entre las clases que tratamos, ni siquiera todas las clases enumeradas finitas. Entonces las matemáticas se vuelven imposibles porque no podemos estar seguros de que haya alguna clase definida por una función predicativa cuyo número sea dos; pues todas las cosas pueden caer en tríadas que concuerden en cada aspecto, en cuyo caso en nuestro sistema no habría ningunas clases unidad y ningunas clases de dos miembros.

Si habremos de preservar la forma ordinaria de las matemáticas, parece que debe hacerse alguna extensión en la noción de una función proposicional, para así considerar también otras clases. Tal extensión es deseable por otros motivos, porque puede mostrarse que muchas cosas que naturalmente serían consideradas como funciones proposicionales no son funciones predicativas.

Por ejemplo

$F(x,y) =$ Algo más que x e y satisface $\phi \hat{z}$.

(Aquí, desde luego, "más que" debe tomare estrictamente, y no en el sentido de *Principia Mathematica* de "distinguible de".)

Esto no es una función predicativa, pero está compuesto por partes de dos funciones predicativas:

(1) Para $x \neq y$

$$F(x,y) \text{ es } \phi x . \phi y :\supset: Nc'\hat{z}(\phi z) \geq 3 :.$$

$$\phi x . \sim \phi y . \vee . \phi y . \sim \phi x :\supset: Nc'\hat{z}(\phi z) \geq 2 :.$$

$$\sim \phi x . \sim \phi y :\supset: Nc'z(\phi z) \geq 1.$$

Esto es una función predicativa porque es una función de verdad de $\phi x, \phi y$ y la proposición constante $Nc'\hat{z}(\phi z) \geq 1, 2, 3,$ que no involucran a *x*, *y*.

(2) Para $x = y$

$$F(x,x) \text{ es } \phi(x) . \supset . Nc'\hat{z}(\phi z) \geq 2 :$$

$$\sim \phi x . \supset . Nc'\hat{z}(\phi z) \geq 1,$$

que es una función predicativa.

Pero $F(x,y)$ no es en sí misma una función predicativa; quizá esto es más difícil de ver. Pero es fácil ver que todas las funciones de este tipo no pueden ser predicativas, porque si lo fuesen podríamos encontrar una función predicativa satisfecha por cualquier individuo dado *a* solo, lo que claramente no podemos hacer en general.

Pues supóngase *fa* (si no, tómese $\sim f\hat{x}$).

Sean $$a = \hat{x}(fx),$$ $$\beta = a - (a).$$

Entonces $\phi x =$"No hay nada que satisface *fx* excepto *x*, y miembros de β" aplica a a y solamente a a. Así que tales funciones no siempre pueden ser predicativas.

Justo como $F(x, y)$ arriba, así también $"x = y"$ está compuesta por dos funciones predicativas:

(1) Para $x \neq y$

$"x = y"$ puede tomarse para ser $(\exists\phi).\phi x.\sim\phi x : (\exists\phi).\phi y.\sim\phi y$, i. e., una contradicción.

(2) Para $x = y$

$"x = y"$ puede tomarse para ser $(\phi) :.\phi x.\vee.\sim\phi x : \phi y.\vee.\sim\phi y$, i. e., una tautología.

Pero $"x = y"$ no es en sí misma predicativa.

Parece, pues, que necesitamos introducir funciones proposicionales no predicativas. ¿Cómo puede hacerse esto? La única forma practicable es hacerlo tan radical y drásticamente como sea posible; abandonar por completo la noción de que ϕa dice sobre *a* lo que ϕb dice sobre *b*; tratar las funciones proposicionales como funciones matemáticas, esto es, extenderlas por completo. En efecto, es claro que, al estar las funciones matemáticas derivadas de [funciones] proposicionales, obtendremos una exposición adecuadamente extensional de las primeras sólo al tomar una perspectiva completamente extensional de las últimas.

Así que, además del concepto previamente definido de una función predicativa, que todavía requeriremos para ciertos propósitos, definimos, o mejor explicamos, pues en nuestro sistema debe tomarse como indefinible, el nuevo concepto de una función proposicional en extensión. Tal función de un individuo resulta de cualquier relación uno-muchos en extensión entre proposiciones e individuos; esto es, una correlación, practicable o impracticable, que asocia con cada individuo una única proposición, el individuo siendo el argumento para la función, la proposición su valor.

Así, ϕ(Sócrates) puede ser la Reina Ana está muerta,

ϕ(Platón) puede ser Einstein es un gran hombre;

$\phi\hat{x}$ siendo simplemente una asociación arbitraria de proposiciones ϕx con individuos *x*.

Una función en extensión se marcará con un sufijo *e* así: $\phi_e \hat{x}$.

Entonces podemos hablar de la totalidad de tales funciones como el rango de valores de una variable aparente ϕ_e.

Considérese ahora $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$.

Esto afirma que en cualquier correlación así la proposición correlacionada con *x* es equivalente a aquella correlacionada con *y*.

Si $x = y$, esto es una tautología (es el producto lógico de valores de $p \equiv p$).

Pero si $x \neq y$, es una contradicción. Pues en una de las correlaciones alguna *p* estará asociada con *x*, y ~*p* con *y*.

Entonces, para esta correlación $f_e \hat{x}$, $f_e x$ es *p*, $f_e y$ es ~*p*, de modo que $f_e x \equiv f_e y$ es auto-contradictoria y $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$ es auto-contradictoria.

Así, $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$ es una tautología si $x = y$, una contradicción si $x \neq y$.[41]

Por lo tanto, puede adecuadamente tomarse como la definición de $x = y$.

$x = y$ es una función en extensión de dos variables. Su valor es tautología cuando *x* e *y* tienen el mismo valor, contradicción cuando *x*, *y* tienen distintos valores.

Ahora tenemos que defender este sugerido rango de funciones para una variable ϕ_e en contra de los cargos de que es ilegítimo y lleva a contradicciones. Es legítimo porque es una notación inteligible, que da un significado definido a los símbolos en los que se emplea. Y tampoco puede llevar a contradicciones, porque eludirá todas las contradicciones sugeridas justo como lo hará el rango de funciones predicativas. Cualquier símbolo que contenga la variable ϕ_e significará de manera distinta a un símbolo que no la contenga, y tendremos el mismo tipo de ambigüedad de "significado" que en el capítulo III, lo que eliminará las contradicciones. Tampoco puede restaurarse ninguna de las contradicciones del primer grupo por nuestra nueva notación, porque todavía será imposible que una clase sea un miembro de sí misma, ya que nuestras funciones en extensión están confinadas a tipos definidos de argumentos por definición.

Debemos ahora tomar las dos nociones que hemos definido, funciones predicativas y funciones en extensión, y considerar cuándo querremos usar una y cuándo la otra.[42] Primero tomemos el caso de cuando los argumentos son individuos: entonces hay todas las ventajas en tomar el rango de funciones que utilizamos en las matemáticas para ser el de las funciones en extensión. Hemos visto cómo esto nos permite definir satisfactoriamente la identidad, y es obvio que no necesitaremos del axioma de reducibilidad, porque cualquier función proposicional obtenida por generalización, o de cualquier forma, es una función en extensión. Además, nos dará una teoría de clases satisfactoria, porque cualquier clase estará definida por una función en extensión, por ejemplo, por la función que es tautología para cualquier miembro de la clase como argumento, pero contradicción para cualquier otro

---

[41] Por otro lado, $(\phi).\phi x \equiv \phi y$ (ϕ predicativa) es una tautología si $x = y$, pero no una contradicción si $x \neq y$.

[42] Desde luego, las funciones predicativas son también funciones en extensión; la cuestión es qué rango queremos para nuestra función variable.

argumento, y la clase nula estará definida por la función auto-contradictoria. Así que la totalidad de clases puede reducirse a la de funciones en extensión, y por tanto será esta totalidad la que requeriremos en las matemáticas, y no la totalidad de funciones predicativas, que corresponde no a "todas las clases" sino a "todos los predicados" o "todas las propiedades".

Por otro lado, cuando llegamos a funciones de funciones la situación es muy distinta. No parece tener sentido el considerar nada excepto funciones predicativas de funciones; ya no aplican las razones para introducir funciones en extensión. Pues no necesitamos definir la identidad entre funciones, sino sólo la identidad entre clases, que se reduce a equivalencia entre funciones, que se define fácilmente. Ni tampoco queremos considerar clases de funciones, sino clases de clases, de lo que también es posible un tratamiento más simple. Así que, en el caso de funciones de funciones, nos confinamos a tales mientras sean predicativas.

Recordemos la definición de una función predicativa de funciones; es una función de verdad de sus valores y proposiciones constantes.[43] Todas las funciones de funciones que ocurren en *Principia* son de este tipo, pero "Creo $(x).\phi x$" como una función de $\phi\hat{x}$ no lo es. Las funciones predicativas de funciones son extensionales en el sentido de *Principia*, esto es, si el rango de $f(\hat{\phi}\hat{x})$ es aquel de funciones predicativas de funciones,

$$\phi_e x \equiv_x \psi_e x :\supset: f(\phi_e \hat{x}) \equiv f(\psi_e \hat{x}).$$

[43] Son, creo, las funciones predicativas de funciones las que el Sr. Russell, en la Introducción a la segunda edición de *Principia*, intenta describir como funciones en las que solamente entran funciones por medio de sus valores. Pero esto es claramente una descripción insuficiente, porque $\phi\hat{x}$ sólo entra en $F(\phi\hat{x}) =$ "Creo ϕa" por medio de su valor ϕa, pero esto ciertamente no es una función del tipo significado, porque no es extensional. Creo que el punto sólo puede explicarse al introducir, como he hecho, la noción de una función de verdad. Sostener, como lo hace el Sr. Russell, que todas las funciones de funciones son predicativas es embarcarse en una inútil disputa verbal, debido a la ambigüedad del vago término "funciones de funciones", que puede utilizarse para significar sólo aquellas [funciones] que sean predicativas o también para incluir algunas como $F(\phi\hat{x})$ de arriba.

Esto es porque $f(\phi_e \hat{x})$ es una función de verdad de los valores de $\phi_e x$ que son equivalentes a los correspondientes valores de $\psi_e x$, de modo que $f(\phi_e \hat{x})$ es equivalente a $f(\psi_e \hat{x})$.

Si asumiéramos esto tendríamos una teoría de clases muy simple, ya que no habría necesidad de distinguir $\hat{x}(\phi_e x)$ de $\phi_e \hat{x}$. Pero aunque es una tautología, claramente no hay manera de probarla, así que tendríamos que tomarla como una proposición primitiva. Si queremos evitar esto, sólo tenemos que mantener la teoría de clases ofrecida en *Principia* basada en "la función extensional derivada". El rango de funciones predicativas de funciones es adecuado para tratar con clases de clases porque, aunque como hemos visto puede haber clases de individuos que sólo pueden definirse por funciones en extensión, no obstante cualquier clase de clases puede definirse por una función predicativa, a saber, por $f(a)$, donde

$$f(\phi_e \hat{x}) = \sum_\psi (\phi_e x \equiv_x \psi_e x),$$

i. e., la suma lógica de $\phi_e x \equiv_x \psi_e x$ para todas las funciones $\psi_e \hat{x}$ que definen los miembros de la clase de clases. Desde luego, si la clase de clases es infinita, esta expresión no puede escribirse. Pero, no obstante, habrá la suma lógica de estas funciones, aunque no podamos expresarla.[44]

Así que para obtener una teoría de clases completa debemos tomar el rango de funciones de individuos para ser el de funciones en extensión; pero el rango de funciones de funciones para ser el de funciones predicativas. Al utilizar estas variables obtenemos el sistema de *Principia Mathematica*, simplificado por la omisión del axioma de reducibilidad y unas cuantas alteraciones correspondientes. Formalmente está casi inalterado; pero su significado ha cambiado considerablemente. Y al preservar así la forma al tiempo que se

[44] Una suma lógica no es como una suma algebraica; sólo un número finito de términos pueden tener una suma algebraica, porque una "suma infinita" es realmente un límite. Pero la suma lógica de un conjunto de proposiciones es la proposición de que éstas no son todas falsas, y existe ya sea que el conjunto sea finito o infinito.

modifica la interpretación, estoy siguiendo a la gran escuela de lógicos matemáticos quienes, en virtud de una serie de asombrosas definiciones, han salvado a las matemáticas de los escépticos, y han proporcionado una rígida demostración de sus proposiciones. Solamente así podemos preservar las matemáticas de la amenaza bolchevique de Brouwer y Weyl.

V. LOS AXIOMAS

En los últimos dos capítulos he mostrado cómo remediar los tres principales defectos de *Principia Mathematica* como un fundamento para las matemáticas. Ahora debemos considerar las dos dificultades importantes que quedan, que conciernen al axioma del infinito y al axioma multiplicativo. La introducción de estos dos axiomas no es tan grave como la del axioma de reducibilidad, porque en sí mismos no son asunciones tan objetables, y porque las matemáticas son ampliamente independientes del axioma multiplicativo y podría razonablemente suponerse que requieren del axioma del infinito. No obstante, debemos intentar determinar el estatus lógico de estos axiomas – si son tautologías o proposiciones empíricas o incluso contradicciones. En esta investigación incluiré, por curiosidad, al axioma de reducibilidad, aunque, como ya prescindimos de él, realmente ya no debe preocuparnos.

Comencemos con el axioma de reducibilidad, que afirma que todas las funciones de individuos obtenidas por la generalización de matrices son equivalentes a funciones elementales. Al discutirlo surgen varios casos, de los cuales consideraré solamente al más interesante, a saber, aquel en el que los números de individuos y de funciones atómicas de individuos son ambos infinitos. En este caso el axioma es una proposición empírica, esto es, ni una tautología ni una contradicción, y por tanto no puede ser ni afirmado ni negado por la lógica o las matemáticas. Esto se muestra como sigue.

(*a*) El axioma no es una contradicción, pero puede ser verdadero.

Pues es claramente posible que debería haber una función atómica definiendo cada clase de individuos. En cuyo caso cada función sería equivalente no meramente a una función elemental, sino a una atómica.

(*b*) El axioma no es una tautología, pero puede ser falso.

Pues es claramente posible que debería haber una infinidad de funciones atómicas, y un individuo *a* tal que sea cual sea la función atómica que tomemos hay otro individuo concordando con *a* con respecto a todas las otras funciones, pero no con respecto a la función tomada. Entonces $(\phi) . \phi!x \equiv \phi!a$ podría no ser equivalente a cualquier función elemental de *x*.

Habiendo mostrado de este modo que el axioma de reducibilidad no es ni una tautología ni una contradicción, pasemos al axioma multiplicativo. Éste afirma que, dada cualquier clase existente *K* de clases existentes, hay una clase teniendo exactamente un miembro en común con cada miembro de *K*. Si por "clase" queremos decir, como yo lo hago, cualquier conjunto de cosas homogéneas en tipo no necesariamente definibles por una función que no es meramente una función en extensión, el axioma multiplicativo me parece la tautología más evidente. No puedo ver cómo esto puede estar sujeto a una duda razonable, si no fuese porque se malinterpretó. Pues con el significado que tiene en *Principia*, donde la clase cuya existencia se afirma debe ser definible por una función proposicional del tipo que ocurre en *Principia*, se vuelve realmente dudoso y, como el axioma de reducibilidad, ni una tautología ni una contradicción. Probamos esto al mostrar

(*a*) No es una contradicción.

Pues es claramente posible que cada clase (en mi sentido) debe definirse por una función atómica, de modo que, ya que está limitada a ser una clase en mi sentido teniendo un miembro en común con cada miembro de *K*, esto también sería una clase en el sentido de *Principia*.

(*b*) No es una tautología.

Para mostrar esto tomamos no al propio axioma multiplicativo, sino al teorema equivalente de que cualesquiera dos clases son conmensurables.

Considérese entonces el siguiente caso: que no hayan funciones atómicas de dos o más variables, y solamente las siguientes funciones atómicas de una variable:

Asociada con cada individuo *a* una función atómica $\phi_a \hat{x}$ tal que

$$\phi_a x . \equiv_x . x = a.$$

Otra función atómica $f \hat{x}$ tal que $\hat{x}(fx), \hat{x}(\sim fx)$ son ambas clases infinitas.

Entonces no hay relación uno-uno, en el sentido de *Principia*, teniendo o bien a $\hat{x}(fx)$ o bien a $\hat{x}(\sim fx)$ por dominio, y por lo tanto estas dos clases son inconmensurables.

En consecuencia, el axioma multiplicativo, interpretado como está en *Principia*, no es una tautología, sino lógicamente dudoso. Pero, tal como yo lo interpreto, es una obvia tautología, y esto puede tomarse como una ventaja adicional de mi teoría. Probablemente se objetará que, si es una tautología, debería ser capaz de ser probado, i. e., deducido de las proposiciones primitivas más simples que son suficientes para la deducción del resto de las matemáticas. Pero no me parece nada improbable que haya una tautología que pudiese establecerse en términos finitos y cuya prueba fuese, no obstante, infinitamente complicada y por tanto imposible para nosotros. Además, no podemos esperar probar el axioma multiplicativo en mi sistema, porque mi sistema es formalmente el mismo que el de *Principia*, y el axioma multiplicativo obviamente no puede ser probado en el sistema de *Principia*, en donde no es una tautología.

Llegamos ahora al axioma del infinito, del cual otra vez mi sistema y el de *Principia* dan distintas interpretaciones. En *Principia*, debido a la definición de identidad ahí utilizada, el axioma significa que hay una infinidad de individuos distinguibles, que es una proposición empírica; porque, incluso suponiendo que haya una infinidad de individuos, la lógica no puede determinar si hay una infinidad de ellos cuyos dos de ellos no tienen todas sus propiedades en común; pero en mi sistema, que admite funciones en extensión, el axioma del infinito meramente afirma que hay un número infinito de individuos. Esto parece ser igualmente una mera cuestión de hecho; pero el profundo análisis de Wittgenstein ha mostrado que esto es una ilusión, y que, si significa cualquier cosa, debe ser o una tautología o una contradicción. Esto será mucho más fácil de explicar si comenzamos no con el infinito sino con algún número más pequeño.

Comencemos con “Hay un individuo”, o escribiéndolo tan simple como sea posible en notación lógica,

$$"(\exists x)\ .\ x = x".$$

Ahora, ¿cuál es esta proposición? Es la suma lógica de las tautologías $x = x$ para todos los valores de *x*, y es por tanto una tautología. Pero suponiendo que no hay individuos, y por tanto ningunos valores de *x*, entonces la fórmula anterior es un sinsentido absoluto. Así que, si significa cualquier cosa, debe ser una tautología.

Tomemos después “Hay al menos dos individuos” o

$$"(\exists x, y)\ .\ x \neq y".$$

Esto es la suma lógica de las proposiciones $x \neq y$, que son tautologías si *x* e *y* tienen distintos valores, contradicciones si tienen el mismo valor. Por lo tanto, es la suma lógica de un conjunto de tautologías y contradicciones; y por tanto una tautología si cualquiera del conjunto es una tautología, pero de otro modo una contradicción. Es decir, es una tautología si *x* e *y* pueden tomar distintos valores (i. e., si hay dos individuos), pero de otro modo una contradicción.

Una breve reflexión hará evidente que esto valdrá no solamente para 2, sino para cualquier otro número, finito o infinito. Es decir, “Hay al menos *n* individuos” es siempre o una tautología o una contradicción, nunca una proposición genuina. Por tanto, no podemos decir nada sobre el número de individuos, porque, cuando intentamos hacerlo, nunca conseguimos construir una proposición genuina, sino solamente una fórmula que es tautológica o auto-contradictoria. El número de individuos, recurriendo a la frase de Wittgenstein, sólo puede mostrarse, y se mostrará ya sea que las fórmulas anteriores sean tautológicas o contradictorias.

La secuencia

“Hay un individuo”,

“Hay al menos 2 individuos”,

"Hay al menos *n* individuos",

"Hay al menos $\aleph_0$ individuos",

"Hay al menos $\aleph_1$ individuos",

comienza siendo tautológica; pero en algún lado comienza a ser contradictoria, y la posición del último término tautológico muestra el número de individuos.

Puede preguntarse cómo, si no podemos decir nada sobre él, podemos prever, como distintas posibilidades, que el número de individuos en el mundo es tal y cual. Hacemos esto al imaginar distintos universos de discurso, a los que podemos estar confinados, de modo que con "todos" queremos decir todos en el universo de discurso; y después que tal y cual universo contiene tales y cuales tantos individuos es una posibilidad real, y puede expresarse en una proposición genuina. Es sólo cuando tomamos, no un universo limitado de discurso, sino al mundo entero, que no puede decirse nada sobre el número de individuos en él.

Podemos hacer lógica no sólo para el mundo entero sino también para tales universos limitados de discurso; si tomamos uno conteniendo *n* individuos,

$Nc'\hat{x}(x = x) \geq n$ será una tautología,

$Nc'\hat{x}(x = x) \geq n+1$ será una contradicción.

Por lo tanto, $Nc'\hat{x}(x = x) \geq n+1$ no puede deducirse de las proposiciones primitivas comunes a todos los universos, y entonces, para un universo conteniendo $n+1$ individuos, debe tomarse como una proposición primitiva.

Similarmente, el axioma del infinito en la lógica del mundo entero, si es una tautología, no puede probarse, sino que debe tomarse como una proposición primitiva. Y este es el curso que debemos adoptar, a menos de que prefiramos la perspectiva de que todo el análisis es auto-contradictorio e insignificativo. No tenemos que asumir que cualquier conjunto particular de cosas, p. ej., los átomos, es infinito, sino meramente que hay algún tipo infinito que podemos tomar para ser el tipo de individuos.