Los principios de la aritmética presentados por un nuevo método

Por

Giuseppe Peano

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: ARITHMETICES PRINCIPIA NOVA METHODO EXPOSITA

Publicado originalmente en Turín, Fratelli Bocca, 1889. Reimpreso en UMI Selecta of Peano, vol. II, pp. 20-55. La *Unione Matematica Italiana* otorgó los permisos para la traducción y publicación de esta obra en esta colección.

PREFACIO

Las cuestiones que pertenecen a los fundamentos de las matemáticas, aunque tratadas por muchos recientemente, aún carecen de una solución satisfactoria. La dificultad tiene su fuente principal en la ambigüedad del lenguaje.

Es por eso que es de máxima importancia examinar atentamente las mismas palabras que utilizamos. Mi objetivo ha sido llevar a cabo este examen, y en este artículo estoy presentando los resultados de mi estudio, así como algunas aplicaciones a la aritmética.

He denotado con signos todas las ideas que ocurren en los principios de la aritmética, de modo que cada proposición está establecida sólo por medio de estos signos.

Los signos pertenecen a la lógica o a la aritmética propiamente dicha. Los signos de la lógica que aquí tienen lugar son diez en número, aunque no todos son necesarios. En la primera parte del presente artículo tanto el uso de estos signos como algunas de sus propiedades se explican en el lenguaje ordinario. No fue mi intención presentar su teoría más plenamente. Los signos de la aritmética son explicados dondequiera que ocurran.

Con estas notaciones, cada proposición asume la forma y la precisión que las ecuaciones tienen en el álgebra; desde las proposiciones así escritas se deducen otras proposiciones, y de hecho por procedimientos que son similares a aquellos utilizados al resolver ecuaciones. Éste es el punto principal de todo el artículo.

Así, habiendo introducido los signos con los que puedo escribir las proposiciones de la aritmética, al tratar con estas proposiciones he utilizado un método que, debido a que en otros estudios también tendrá que ser seguido, presentaré brevemente aquí.

Entre los signos de la aritmética, aquellos que pueden ser expresados con otros signos de la aritmética junto con los signos de la lógica representan las ideas que podemos definir. Así, he definido todos los signos excepto los cuatro que están contenidos en las explicaciones de §1. Si, como creo, éstos no pueden reducirse más, no es posible definir las ideas expresadas por ellos mediante ideas que se asumen como previamente conocidas.

Las proposiciones que son deducidas desde otras por las operaciones de la lógica son *teoremas*; a las proposiciones que no son deducidas así las he llamado *axiomas*. Hay nueve de estos axiomas (§1), y expresan las propiedades fundamentales de los signos que carecen de definición.

En §§1-6 he demostrado las propiedades ordinarias de los números. En aras de la brevedad, he omitido pruebas que son similares a otras pruebas ofrecidas antes. Con el fin de expresar pruebas con los signos de la lógica, tiene que cambiarse la forma ordinaria de estas pruebas; esta transformación a veces es muy difícil, pero es por medio de ella que se revela más claramente la naturaleza de la prueba.

En secciones subsecuentes trato varios temas, de modo que el poder del método será más evidente.

§7 contiene unos cuantos teoremas que pertenecen a la teoría de números. En §§8-9 se encuentran las definiciones de números racionales e irracionales.

Por último, en §10 presento unos cuantos teoremas que, creo, son nuevos, pertenecientes a la teoría de aquellos objetos que Cantor ha llamado *Punktmengen* (*ensembles de points*).

En el presente artículo he hecho uso de los estudios de otros autores. Los símbolos lógicos y las proposiciones contenidas en las partes II, III, y IV, excepto por unas cuantas, han de atribuirse a los trabajos de muchos autores, especialmente Boole.[1]

Introduje el signo ε, que no debe confundirse con el signo Ɔ; también introduje aplicaciones de inversión en la lógica, así como algunas otras convenciones, con el fin de poder expresar cualquier proposición.

Para pruebas en la aritmética, he recurrido a *Grassmann 1861*.

El reciente trabajo de Dedekind (*1888*) también me fue de lo más útil; en él están agudamente examinadas cuestiones pertenecientes a los fundamentos de los números.

[1] Véase *Boole 1847, 1848, 1854*, y *Schröder 1877*. Schröder ya ha tratado algunas cuestiones relevantes para la lógica en un trabajo anterior (*1873*). He presentado muy brevemente las teorías de Boole y de Schröder en un libro mío (*1888*). Véase también *Peirce 1880, 1885, Jevons 1883, MacColl 1877, 1878, 1878ª*, y *1880*.

Este pequeño libro mío pretende ofrecer un ejemplo del nuevo método. Con estas notaciones podemos establecer y demostrar otras innumerables proposiciones, ya sea que pertenezcan a los números racionales o irracionales. Pero para tratar con otras teorías deben introducirse nuevos signos denotando nuevos objetos. No obstante, creo que las proposiciones de cualquier ciencia pueden expresarse con estos signos de la lógica por sí solos, siempre que añadamos signos representando los objetos de la ciencia en cuestión.

NOTACIONES LÓGICAS

I. *Puntuación*

Las letras $a, b, \ldots, x, y, \ldots, x', y', \ldots$ denotan objetos indeterminados. Denotamos objetos bien determinados con signos o con las letras $\mathrm{P}, \mathrm{K}, \mathrm{N}, \ldots$.

Generalmente escribiremos signos en una sola línea. Para mostrar el orden en el que han de tomarse, utilizamos *paréntesis*, como en el álgebra, o *puntos*, $.,:,\therefore,::,$ y así sucesivamente.

Para comprender una fórmula dividida por puntos, primero tomamos juntos los signos que no están separados por ningún punto, después aquellos separados por un punto, después aquellos separados por dos puntos, y así sucesivamente.

Por ejemplo, sean $a, b, c, \ldots$ cualesquiera signos. Entonces $ab.cd$ significa $(ab)(cd)$, y $ab.cd : ef.gh \therefore k$ significa $(((ab)(cd))((ef)(gh)))k$.

Los signos de puntuación pueden omitirse si fórmulas que difieren en puntuación tienen el mismo significado o si solamente una fórmula, que es justo la que queremos escribir, tiene significado.

Para evitar el peligro de la ambigüedad, nunca utilizamos $.$ o $:$ como signos para operaciones aritméticas.

El único tipo de paréntesis es $(\ )$; si en la misma fórmula tienen lugar paréntesis y puntos, debe tomarse primero lo que está contenido dentro de los paréntesis.

II. *Proposiciones*

El signo P significa *proposición*.

El signo $\cap$ se lee como *y*. Sean *a* y *b* proposiciones; entonces $a \cap b$ es la afirmación simultánea de las proposiciones *a* y *b*. En aras de la brevedad, ordinariamente escribimos *ab* en lugar de $a \cap b$.

El signo $-$ se lee como *no*. Sea *a* una P; entonces $-a$ es la negación de la proposición *a*.

El signo $\cup$ se lee como *o*. Sean *a* y *b* proposiciones; entonces $a \cup b$ es lo mismo que $- : -a . -b$.

El signo Λ significa *lo falso*, o *lo absurdo*.

El signo Ɔ significa *uno deduce*; así, *a* Ɔ *b* significa lo mismo que *b* C *a*.[2] Si las proposiciones *a* y *b* contienen los objetos indeterminados $x, y, \ldots,$ esto es, son condiciones entre estos objetos, entonces *a* $Ɔ_{x, y, \ldots}$ *b* significa: sean lo que sean $x, y, \ldots,$ de la proposición *a* uno deduce *b*. Si no hay peligro de ninguna ambigüedad, escribimos únicamente Ɔ en lugar de $Ɔ_{x, y, \ldots}$.

El signo = significa *es igual a*. Sean *a* y *b* proposiciones; entonces $a = b$ significa lo mismo que *a* Ɔ *b* . *b* Ɔ *a*; la proposición $a =_{x, y, \ldots} b$ significa lo mismo que *a* $Ɔ_{x, y, \ldots}$ *b* . *b* $Ɔ_{x, y, \ldots}$ *a*.

III. *Proposiciones de la lógica*

Sean $a, b, c, \ldots$ proposiciones. Entonces tenemos:

1. *a* Ɔ *a*.
2. *a* Ɔ *b* . *b* Ɔ *c* :Ɔ. *a* Ɔ *c*.
3. *a* = *b* .=: *a* Ɔ *b* . *b* Ɔ *a*.
4. $a = a$.

[2] El signo C significa *es una consecuencia de*. Nota del Traductor.

5. $a = b \;.{=}.\; b = a.$

6. $a = b \;.\; b \supset c \;{:}{\supset}.\; a \supset c.$

7. $a \supset b \;.\; b = c \;{:}{\supset}.\; a \supset c.$

8. $a = b \;.\; b = c \;{:}{\supset}.\; a = c.$

9. $a = b \;.{\supset}.\; a \supset b.$

10. $a = b \;.{\supset}.\; b \supset a.$

---

11. $ab \supset a.$

12. $ab = ba.$

13. $a(bc) = (ab)c = abc.$

14. $aa = a.$

15. $a = b \;.{\supset}.\; ac = bc.$

16. $a \supset b \;.{\supset}.\; ac \supset bc.$

17. $a \supset b \;.\; c \supset d \;{:}{\supset}.\; ac \supset bd.$

18. $a \supset b \;.\; a \supset c \;{:}{=}.\; a \supset bc.$

19. $a = b \;.\; c = d \;{:}{\supset}.\; ac = bd.$

---

20. $-(-a) = a.$

21. $a = b \;.{=}.\; -a = -b.$

22. $a \supset b \;.{=}.\; -b \supset -a.$

---

23. $a \cup b \;.{=}\; \therefore - : -a \;.\; -b.$

24. $-(ab) = (-a) \cup (-b).$

25. $-(a \cup b) = (-a)(-b).$

26. $a \supset .\; a \cup b.$

27. $a \cup b = b \cup a.$

28. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c.$

29. $a \cup a = a.$

30. $a(b \cup c) = ab \cup ac.$

31. $a = b \;.{\supset}.\; a \cup c = b \cup c.$

32. $a \supset b \;.{\supset}.\; a \cup c \supset b \cup c.$

33. $a \supset b \;.\; c \supset d \;{:}{\supset}{:}\; a \cup c \;.{\supset}.\; b \cup d.$

34. $b \supset a \;.\; c \supset a \;{:}{=}.\; b \cup c \supset a.$

---

35. $a - a = \Lambda.$

36. $a\Lambda = \Lambda.$

37. $a \cup \Lambda = a.$

38. $a \mathrm{Ɔ}\ \Lambda .=. a = \Lambda.$

39. $a \mathrm{Ɔ}\ b .=.\ a - b = \Lambda.$

40. $\Lambda\ \mathrm{Ɔ}\ a.$

41. $a \cup b = \Lambda .=: a = \Lambda\ .\ b = \Lambda.$

---

42. $a \mathrm{Ɔ}\ .\ b \mathrm{Ɔ}\ c :=: ab \mathrm{Ɔ}\ c.$

43. $a \mathrm{Ɔ}\ .\ b = c :=. ab = ac.$

Sea α un signo de relación (por ejemplo, =, Ɔ), de modo que $a\ \alpha\ b$ es una proposición. Entonces, en lugar de $-.a\ \alpha\ b$, escribimos $a - \alpha\ b$; esto es,

$$a- = b\ .=:\ -.a = b.$$

$$a -\mathrm{Ɔ}\ b\ .=: -.\ a \mathrm{Ɔ}\ b.$$

Así, el signo –= significa *no es igual a*. Si la proposición a contiene al indeterminado x, entonces $a- =_x \Lambda$ significa: hay x que satisfacen la condición a. El signo –Ɔ significa *uno no deduce*.

Similarmente, si α y β son signos de relación, en lugar de $a\ \alpha\ b\ .\ a\ \beta\ b$ y $a\ \alpha\ b\ .\cup.\ a\ \beta\ b$ podemos escribir $a\ .\alpha\beta.\ b$ y $a\ .\alpha \cup \beta.\ b$, respectivamente. Así, si a y b son proposiciones, la fórmula $a\ .\mathrm{Ɔ}-=.\ b$ dice: de a uno deduce b, pero no a la inversa.

$$a\ .\mathrm{Ɔ}-=.\ b :=: a \mathrm{Ɔ}\ b\ .\ b -\mathrm{Ɔ}\ a.$$

Tenemos las fórmulas:

$$a \mathrm{Ɔ}\ b\ .\ b \mathrm{Ɔ}\ c\ .\ a -\mathrm{Ɔ}\ c := \Lambda.$$

$$a = b\ .\ b = c\ .\ a -= c := \Lambda.$$

$$a \mathrm{Ɔ}\ b\ .\ b \mathrm{Ɔ}-= c :\mathrm{Ɔ}.\ a \mathrm{Ɔ}-= c.$$

$$a \mathrm{Ɔ}-= b\ .\ b \mathrm{Ɔ}\ c :\mathrm{Ɔ}.\ a \mathrm{Ɔ}-= c.$$

Pero rara vez utilizaremos estos dispositivos.

IV. *Clases*

El signo K significa *clase*, o agregado de objetos.

El signo ε significa *es*. Así, $a\ \varepsilon\ b$ se lee como *a es un b*; $a\ \varepsilon$ K significa *a es una clase*; $a\ \varepsilon$ P significa *a es una proposición*.

En lugar de $-(a\ \varepsilon\ b)$ escribimos $a -\varepsilon\ b$; el signo $-\varepsilon$ significa *no es*; esto es,

44. $a -\varepsilon\ b$.=: $-.a\ \varepsilon\ b$.

El signo $a, b, c\ \varepsilon\ m$ significa: *a*, *b*, y *c* son *m*; esto es,

45. $a, b, c\ \varepsilon\ m$.=: $a\ \varepsilon\ m$. $b\ \varepsilon\ m$. $c\ \varepsilon\ m$.

Sea *a* una clase; entonces $-a$ significa la clase compuesta por los individuos que no son *a*.

46. $a\ \varepsilon$ K .Ɔ: $x\ \varepsilon\ -a$.=. $x -\varepsilon\ a$.

Sean *a* y *b* clases; $a \cap b$, o *ab*, es la clase compuesta por los individuos que son al mismo tiempo *a* y *b*; $a \cup b$ es la clase compuesta por los individuos que son *a* o *b*.

47. $a, b\ \varepsilon$ K .Ɔ∴ $x\ \varepsilon$. ab :=: $x\ \varepsilon\ a$. $x\ \varepsilon\ b$.
48. $a, b\ \varepsilon$ K .Ɔ∴ $x\ \varepsilon$. $a \cup b$:=: $x\ \varepsilon\ a$.∪. $x\ \varepsilon\ b$.

El signo Λ denota la clase que no contiene individuos. Así,

49. $a\ \varepsilon$ K .Ɔ∴ $a = \Lambda$:=: $x\ \varepsilon\ a$.$=_x$ Λ.

El signo Ɔ significa *está contenido en*. Así, *a* Ɔ *b* significa *la clase a está contenida en la clase b*.

50. $a, b\ \varepsilon$ K .Ɔ∴ *a* Ɔ *b* :=: $x\ \varepsilon\ a$.$Ɔ_x$. $x\ \varepsilon\ b$.

Los signos Λ y Ɔ tienen aquí un significado que difiere un tanto del significado ofrecido arriba; pero no surgirá ninguna ambigüedad. Si estamos tratando con proposiciones, estos signos se leen como *lo absurdo* y *uno deduce*; pero, si estamos tratando con clases, se leen como *nada* y *está contenido en*.

Si a y b son clases, la fórmula $a = b$ significa $a \supset b \,.\, b \supset a$. Así,

51. $a, b \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\supset\therefore\; a = b \;:=:\; x \;\varepsilon\; a \,.=_x.\, x \;\varepsilon\; b$.

Las proposiciones 1-41 siguen valiendo si a, b,… denotan clases; además, tenemos:

52. $a \;\varepsilon\; b \,.\supset.\, b \;\varepsilon\; \mathrm{K}$.
53. $a \;\varepsilon\; b \,.\supset.\, b \;-=\; \Lambda$.
54. $a \;\varepsilon\; b \,.\, b = c \,:\supset.\, a \;\varepsilon\; c$.
55. $a \;\varepsilon\; b \,.\, b \supset c \,:\supset.\, a \;\varepsilon\; c$.

Sea s una clase y k una clase contenida en s; entonces decimos que k es un individuo de la clase s si k consiste en un solo individuo. Así,

56. $s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, k \supset s \,:\supset::\, k \;\varepsilon\; s \,.=\therefore\; k \;-=\; \Lambda \;:\; x, y \;\varepsilon\; k \,.\supset_{x,y}.\; x = y$.

V. *Inversión*

El signo de inversión es [ ], y explicaremos su uso en la parte VI. Aquí simplemente presentamos algunos casos especiales.

1. Sea a una proposición conteniendo al indeterminado x; entonces la expresión $[x\;\varepsilon]\,a$, que se lee como *el x para el cual a*, o *las soluciones* de la condición a, o sus *raíces*, significa la clase compuesta por los individuos que satisfacen la condición a. Así,

57. $a \;\varepsilon\; \mathrm{P} \,.\supset:\, [x \;\varepsilon]\, a \,.\, \varepsilon\; \mathrm{K}$.

58. $a \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\supset\therefore\; [x \;\varepsilon].\, x \;\varepsilon\; a := a$.

59. $a \;\varepsilon\; \mathrm{P} \,.\supset\therefore\; x \;\varepsilon .\, [x \;\varepsilon]\, a := a$.

Sean α y β proposiciones conteniendo al indeterminado x; tenemos:

60. $[x \;\varepsilon]\; (\alpha\beta) = ([x \;\varepsilon]\; \alpha)([x \;\varepsilon]\; \beta)$.

61. $[x\ \varepsilon]\ -\alpha\ = -[x\ \varepsilon]\ \alpha$.

62. $[x\ \varepsilon]\ (\alpha \cup \beta)\ = [x\ \varepsilon]\ \alpha \cup [x\ \varepsilon]\ \beta$.

63. $\alpha\ \supset_x\ \beta$.=. $[x\ \varepsilon]\ \alpha\ \supset [x\ \varepsilon]\ \beta$.

64. $a =_x\ \beta$.=. $[x\ \varepsilon]\ \alpha\ = [x\ \varepsilon]\ \beta$.

2. Sean x e y cualesquiera objetos; consideramos como un nuevo objeto al sistema compuesto por el objeto x y el objeto y, y lo denotamos con el signo (x, y); y similarmente si tenemos un mayor número de objetos. Sea α una proposición conteniendo los indeterminados x e y; entonces $[(x, y)\ \varepsilon]\alpha$ significa la clase compuesta por los objetos (x, y) que satisfacen la condición α. Tenemos:

65. $\alpha\ \supset_{x,y}\ \beta$.=. $[(x, y)\ \varepsilon]\alpha\ \supset [(x, y)\ \varepsilon]\beta$.

66. $[(x, y)\ \varepsilon]\ \alpha - = \Lambda$.=∴ $[x\ \varepsilon].[y\ \varepsilon]\ \alpha - = \Lambda\ : - = \Lambda$.

3. Sea $x\ \alpha\ y$ una relación entre los indeterminados x e y (por ejemplo, en lógica, las relaciones $x = y$, $x - = y$, $x \supset y$; en aritmética, $x < y$, $x > y$, y así sucesivamente). Entonces el signo $[\varepsilon]\alpha y$ denota los x que satisfacen la relación $x\ \alpha\ y$. En aras de la conveniencia, utilizamos el signo ɜ en lugar del signo $[\varepsilon]$. Así, ɜ $\alpha\ y$.=: $[x\ \varepsilon]$. $x\ \alpha\ y$, y el signo ɜ se lee como *los objetos que*. Por ejemplo, sea y un número; entonces ɜ $< y$ denota la clase formada por los números x que satisfacen la condición $x < y$, es decir, *los objetos que son menores que y*, o simplemente *los objetos menores que y.* Similarmente, si el signo D significa *divide* o *es un divisor de*, la fórmula ɜ D significa *los objetos que dividen* o *los divisores*. Se sigue que $x\ \varepsilon$ ɜ $\alpha\ y = x\ \alpha\ y$.

4. Sea α una fórmula conteniendo al indeterminado x. Entonces la expresión $x'\ [x]\ \alpha$, que se lee como *x´ siendo sustituido por x en* α, denota la fórmula obtenida si, en α, leemos x' por x. Se sigue que $x\ [x]\ \alpha\ =\ \alpha$.

5. Sea α una fórmula que contiene los indeterminados $x, y, \ldots$. Entonces $(x', y', \ldots)[x, y, \ldots]\ \alpha,$ que se lee como $x', y', \ldots$ *siendo sustituidos por* $x, y, \ldots$ *en* α, denota

la fórmula obtenida si, en α, las letras x', y',… se escriben por x, y,…. Se sigue que $(x, y)[x, y]\ \alpha = \alpha$.

VI. *Funciones*

Los símbolos de la lógica introducidos arriba bastan para expresar cualquier proposición de la aritmética, y utilizaremos solamente estos símbolos. Aquí explicamos brevemente algunos otros símbolos que pueden resultar útiles.

Sea *s* una clase; asumimos que la igualdad está definida entre los objetos del sistema *s* como para satisfacer las condiciones:

$$a = a,$$

$$a = b .=. b = a,$$

$$a = b\ .\ b = c :Ɔ. a = c.$$

Sea φ un signo o un agregado de signos tal que, si *x* es un objeto de la clase *s*, la expresión φx denota un nuevo objeto; también asumimos que la igualdad está definida entre los objetos φx; además, si *x* e *y* son objetos de la clase *s* y si $x = y$, asumimos que es posible deducir $\varphi x = \varphi y$. Entonces se dice que el signo φ es un *presigno función en la clase s*, y escribimos $\varphi\ \varepsilon$ F‘*s*:

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K} .Ɔ:: \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}‘s .=∴ x, y\ \varepsilon\ s\ .\ x = y :Ɔ_{x,y}.\ \varphi x = \varphi y.$$

Si, *x* siendo cualquier objeto de la clase *s*, la expresión $x\varphi$ denota un nuevo objeto y $x\varphi = y\varphi$ se sigue de $x = y$, entonces decimos que φ es un *postsigno función en la clase s*, y escribimos $\varphi\ \varepsilon\ s$’F:

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K} .Ɔ:: \varphi\ \varepsilon\ s’\mathrm{F} .= ∴ x, y\ \varepsilon\ s\ .\ x = y :Ɔ_{x,y}.\ x\varphi = y\varphi .$$

Ejemplos. Sea *a* un número; entonces $a+$ es un presigno función en la clase de números, y $+a$ es un postsigno función; para cualquier número *x*, las fórmulas $a + x$ y $x + a$ denotan nuevos números; $a + x = a + y$ y $x + a = y + a$ se siguen de $x = y$. Así,

$$a\ \varepsilon\ \mathrm{N}\ .\supset: a + .\varepsilon.\ \mathrm{F`N}.$$

$$a\ \varepsilon\ \mathrm{N}\ .\supset: +a\ .\varepsilon\ .\ \mathrm{N'F}.$$

Sea φ un presigno función en la clase *s*. Entonces $[\varphi]\,y$ denota la clase compuesta por los *x* que satisfacen la condición $\varphi x = y$; esto es,

$$Def.\ s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\ .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F`}s\ :\supset: [\varphi]\,y\ .=. [x\ \varepsilon]\ (\varphi x = y).$$

La clase $[\varphi]\ y$ puede contener uno o varios individuos, o ninguno en absoluto. Tenemos

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K}.\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F`}s\ :\supset: y = \varphi x\ .=.\ x\ \varepsilon\ [\varphi]\,y.$$

Pero si φy consiste en un solo individuo, tenemos $y = \varphi x\ .=.\ x = [\varphi]\,y$.

Sea φ un postsigno función; similarmente escribimos:

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\ .\ \varphi\ \varepsilon\ s\mathrm{'F}\ :\supset\therefore\ y\,[\varphi] = [x\ \varepsilon]\ (x\varphi = y).$$

El signo [ ] es llamado el *signo de inversión*, y ya hemos presentado algunos de sus usos en la lógica. Si α es una proposición conteniendo al indeterminado *x* y *a* es una clase compuesta por los individuos *x* que satisfacen la condición α, tenemos $x\ \varepsilon\ a\ .=\ \alpha$, y entonces $a = [x\ \varepsilon]\ \alpha$, como en V 1.

Sea α una fórmula conteniendo al indeterminado *x* y sea φ un presigno función que produce la fórmula α cuando es escrito antes de la letra *x*; esto es, sea $\alpha = \varphi x$. Entonces tenemos $\varphi = \alpha\ [x]$, y, si x' es un nuevo objeto, tenemos $\varphi x' = \alpha\ [x]\ x'$; esto es, si α es una fórmula conteniendo al indeterminado *x*, entonces $\alpha\ [x]\ x'$ significa lo que se obtiene cuando, en α, ponemos x' por *x*.

Similarmente, sea α una fórmula conteniendo al indeterminado *x* y sea φ un postsigno función, tal que $x\varphi = \alpha$; se sigue que $\varphi = [x]\ \alpha$. Entonces, si x' es un nuevo objeto, tenemos $x'\varphi = x'\ [x]\ \alpha$; esto es, $x'\ [x]\ \alpha$ denota otra vez lo que se obtiene cuando, en α, leemos x' por *x*, como en V 4.

El signo [ ] puede tener otros usos en la lógica, que presentamos sólo brevemente porque no lo utilizaremos en estas formas. Sean a y b dos clases; entonces $[a\cap]\, b$ (o $b\, [\cap a]$) denota las clases x que satisfacen la condición $b = a \cap x$ (o la condición $b = x \cap a$). Si b no está contenida en a, ninguna clase satisface esta condición; si b está contenida en a, el signo $b\, [\cap a]$ denota todas las clases que contienen b y están contenidas en $b \cup -a$.

En la aritmética, sean a y b números; entonces $b\, [+\, a]$ (o $[a\, +]\, b$) denota al número x que satisface la condición $b = x + a$ (o $b = a + x$), esto es, $b - a$. Similarmente tenemos $b\, [\times\, a] = [a\, \times]\, b = b\, /\, a$. Este signo puede encontrar un uso incluso en el análisis; así,

$y = \sin x \;.\!=\!.\; x\ \varepsilon\ [\sin]\, y$ (en lugar de $x = \operatorname{arc} \sin y$)

$d\mathrm{F}(x) = f\,(x)dx \;.\!=\!.\; \mathrm{F}(x)\ \varepsilon\ [d]\ f\,(x)dx$ (en lugar de $\mathrm{F}(x) = \int f\,(x)dx$).

Sea φ otra vez un presigno función en una clase s y sea k una clase contenida en s; entonces φk denota la clase consistiendo en todos los φx, donde los x son los objetos de clase k; esto es,

Def. $s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k \supset s\, .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s :\supset.\ \varphi k\ = [y\ \varepsilon]\ (k\, .\, [\varphi]\, y :- = \Lambda)$,

o $s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k \supset s\, .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s :\supset.\ \varphi k\ = [y\ \varepsilon]\ ([x\ \varepsilon] : x\ \varepsilon\ k\, .\ \varphi x = y \therefore - = \Lambda)$.

Def. $s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, k \supset s\, .\ \varphi\ \varepsilon\ s'\mathrm{F} :\supset.\ k\varphi\ = [y\ \varepsilon]\ (k\, .\, y\, [\varphi] :- = \Lambda)$.

Así, si $\varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s$, entonces φs denota la clase compuesta por todos los φx, donde los x son objetos de la clase s. Tenemos:

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s\, .\, y\ \varepsilon\ \varphi s\ :\supset:\ \varphi\ [\varphi]\, y = y.$$

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, a, b\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\, a \supset s\, .\, b \supset s\, .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s :\supset.\ \varphi(a \cup b) = (\varphi a) \cup (\varphi b).$$

$$s\ \varepsilon\ \mathrm{K}\, .\ \varphi\ \varepsilon\ \mathrm{F}`s :\supset.\ \varphi\Lambda = \Lambda.$$

$$s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, a, b \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, b \supset s \,.\, a \supset b \,.\, \varphi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘s \,{:}{\supset}.\; \varphi a \supset \varphi b \,.$$

$$s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, a, b \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, a \supset s \,.\, b \supset s \,.\, \varphi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘s \,{:}{\supset}.\; \varphi(ab) \supset (\varphi a)(\varphi b).$$

Sea a una clase; entonces $a \cap \mathrm{K}$ (o $\mathrm{K} \cap a$, o Ka) denota todas las clases de la forma $a \cap x$ (o $x \cap a$, o xa), donde x es cualquier clase; esto es, Ka denota las clases que están contenidas en a. La fórmula $x \;\varepsilon\;$ Ka significa lo mismo que $x \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, x \supset a$. A veces utilizaremos esta convención; así, KN significa *una clase de números*.

Similarmente, si a es una clase, $\mathrm{K} \cup a$ denota las clases que contienen a.

Sea a un número; entonces a + N (o N + a) denota *los números mayores que el número a*; $a \times$ N (o N $\times$ a o Na) denota *los múltiplos del número a*; a^{N} denota *las potencias del número a*; $\mathrm{N}^2, \mathrm{N}^3, \ldots$ denotan *los cuadrados*, *los cubos*, y así sucesivamente.

Igualdad, producto, y potencias pueden definirse así para signos función:

$$Def.\; s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, \varphi, \psi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘s \,{:}{\supset}{\therefore}\; \varphi = \psi \;{:}{=}{:}\; x \;\varepsilon\; s \,.{\supset_x}.\; \varphi x = \psi x.$$

$$Def.\; s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, \varphi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘s \,.\, \psi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘\,\varphi s \,.\, x \;\varepsilon\; s \,{:}{\supset}.\; \psi\varphi x = \psi(\varphi x).$$

Así, si asumimos esta definición, tenemos el nuevo presigno función $\psi\varphi$; es llamado el *producto de los signos* ψ y φ.

Similarmente si φ y ψ son postsignos función.

La siguiente proposición se sostiene:

$$s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, \varphi \;\varepsilon\; \mathrm{F}‘s \,.\, \varphi s \supset s \,{:}{\supset}{:}\; \varphi\varphi s \supset s \,.\, \varphi\varphi\varphi s \supset s \,.\text{ y así sucesivamente.}$$

Se dice que las funciones $\varphi\varphi, \varphi\varphi\varphi, \ldots$ son *iteradas* y generalmente están denotadas por los signos $\varphi^2, \varphi^3, \ldots.,$ como potencias de la operación φ.

Pero si φ es un postsigno función, podemos utilizar la siguiente notación más conveniente sin ambigüedad alguna:

$$Def.\; s \;\varepsilon\; \mathrm{K} \,.\, \varphi \;\varepsilon\; s’\mathrm{F} \,.\, s\varphi \supset s \,{:}{\supset}{:}\; \varphi 1 = \varphi \,.\, \varphi 2 = \varphi\varphi \,.\, \varphi 3 = \varphi\varphi\varphi \,.\text{ y así sucesivamente.}$$

Asumiendo esta definición, si m, $n \varepsilon$ N, tenemos $\varphi(m+n)=(\varphi m)(\varphi n)$; $(\varphi m)n=\varphi(mn)$.

Si utilizamos esta definición en la aritmética, obtenemos lo siguiente. Podemos denotar al número que sigue al número a con el más conveniente signo de a +; entonces $a+1, a+2, \ldots$, y, si b es un número, $a+b$, tienen el significado de $a+, a++, \ldots$, que se desprende de la definición en § 1 más abajo. La proposición 6 en § 1 puede escribirse como N + Ɔ N. Si a, b, y c son números, entonces a :+ b . c significa a + bc, y a :× b. c significa ab^c.

Los signos función poseen muchas otras propiedades, especialmente si satisfacen la condición $\varphi x=\varphi y$.Ɔ. $x=y$. Un signo función que satisface esta condición es llamado *similar* por Dedekind (*ähnliche Abbildung*).

Pero nos falta el espacio para presentar estas propiedades.

Observaciones

Una *definición*, o *Def.*, para abreviar, es una proposición de la forma $x=a$ o α Ɔ. $x=a$, donde a es un agregado de signos teniendo un significado conocido, x es un signo o un agregado de signos, hasta ahora sin significado, y α es la condición bajo la que está dada la definición.

Un *teorema* (Teor. o T.) es una proposición que se *demuestra*. Si un teorema tiene la forma α Ɔ β, donde α y β son proposiciones, entonces α es llamada la *hipótesis* (Hip. o, aún más corto, Hp.) y β la *tesis* (Tes. o Ts.). Hip. y Ts. dependen de la forma del teorema; en efecto, si escribimos $-\beta$ Ɔ $-\alpha$ en lugar de α Ɔ β, entonces $-\beta$ es la Hp. y $-\alpha$ la Ts.; si escribimos $\alpha-\beta=\Lambda$, Hp. y Ts. no existen.

En cualquier sección de abajo, el signo P seguido por un número denota la proposición indicada por ese número en la misma sección. Las proposiciones de la lógica están indicadas con el signo L y el número de la proposición.

Las fórmulas que no caben en una línea están continuadas en la línea siguiente sin ningún signo interviniendo.

§ 1. NÚMEROS Y ADICIÓN

Explicaciones

El signo N significa *número* (*entero positivo*).

El signo 1 significa *unidad*.

El signo $a+1$ significa *el sucesor de a*, o *a más* 1.

El signo = significa *es igual a*. Consideramos este signo como nuevo, aunque tiene la forma de un signo de la lógica.

Axiomas

1. $1 \ \varepsilon\ \mathrm{N}$.
2. $a \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset. a = a$.
3. $a, b \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset: a = b .=. b = a$.
4. $a, b, c \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset\therefore a = b . b = c :\supset. a = c$.
5. $a = b . b \ \varepsilon\ \mathrm{N} :\supset. a \ \varepsilon\ \mathrm{N}$.
6. $a \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset. a + 1 \ \varepsilon\ \mathrm{N}$.
7. $a, b \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset: a = b .=. a + 1 = b + 1$.
8. $a \ \varepsilon\ \mathrm{N} .\supset. a + 1 -= 1$.
9. $k \ \varepsilon\ \mathrm{K} \therefore 1 \ \varepsilon\ k \therefore x \ \varepsilon\ \mathrm{N} . x \ \varepsilon\ k :\supset_x. x + 1 \ \varepsilon\ k ::\supset. \mathrm{N} \supset k$.

Definiciones

10. $2 = 1+1;\ 3 = 2+1;\ 4 = 3+1;$ y así sucesivamente.

Teoremas

11. $2 \ \varepsilon\ \mathrm{N}$.

Prueba:

P 1 .Ɔ:	1 ε N	(1)
1 [*a*] (P 6) .Ɔ:	1 ε N .Ɔ. 1 +1 ε N	(2)
(1) (2) .Ɔ:	1 + 1 ε N	(3)
P 10 .Ɔ:	2 = 1 + 1	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [*a*, *b*] (P 5) :Ɔ:	2 ε N	(Teorema).

Nota. Hemos escrito explícitamente todos los pasos de esta muy sencilla prueba. En aras de la brevedad, ahora la escribimos como sigue:

P 1 . 1 [*a*] (P 6) :Ɔ: 1 + 1 ε N . P 10 . (2, 1 + 1) [*a*, *b*] (P 5) :Ɔ: T.

o

P 1 . P 6 :Ɔ: 1 + 1 ε N . P 10 . P 5 :Ɔ: T.

12. 3, 4,… ε N.
13. *a*, *b*, *c*, *d* ε N . *a* =*b* . *b* = *c* . *c* = *d* :Ɔ: *a* = *d*.

Prueba: Hip. P 4 :Ɔ: *a*, *c*, *d* ε N . *a* = *c* . *c* = *d* . P 4 :Ɔ: Tes.

14. *a*, *b*, *c* ε N . *a* = *b* . *b* = *c* . *a* –= *c* := Λ.

Prueba: P 4 . L 39 :Ɔ. Teor.

15. *a*, *b*, *c* ε N . *a* = *b* . *b* –= *c* :Ɔ. *a* –= *c*.
16. *a*, *b* ε N . *a* = *b* :Ɔ. *a* + 1 = *b* + 1.

16´. *a*, *b* ε N . *a* + 1 = *b* + 1 :Ɔ. *a* = *b*.

Prueba: P 7 = (P 16) (P 16´).

17. *a*, *b* ε N .Ɔ: *a* –= *b* .=. *a* + 1 –= *b* + 1.

Prueba: P 7 . L 21 :Ɔ. Teor.

Definición

18. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Nota. Esta definición ha de leerse como sigue: si a y b son números, y si $(a+b)+1$ tiene un significado (es decir, si $a + b$ es un número) pero $a+(b+1)$ aún no se ha definido, entonces $a+(b+1)$ significa el número que sigue a $a+b$.

De esta definición, así como de las anteriores, se sigue que

$a\ \varepsilon$ N .Ɔ∴ $a + 2 = a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$,

$a\ \varepsilon$ N .Ɔ∴ $a + 3 = a + (2 + 1) = (a + 2) + 1$,

y así sucesivamente.

Teoremas

19. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a + b\ \varepsilon$ N.

Prueba: $a\ \varepsilon$ N . P 6 :Ɔ: $a + 1\ \varepsilon$ N :Ɔ: $1\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts. (1)

$a\ \varepsilon$ N .Ɔ:: $b\ \varepsilon$ N . $b\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts :Ɔ: $a + b\ \varepsilon$ N . P 6 :Ɔ: $(a + b) + 1\ \varepsilon$ N . P 18 :Ɔ: $a + (b + 1)\ \varepsilon$ N :Ɔ: $(b + 1)\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts. (2)

$a\ \varepsilon$ N . (1) . (2) .Ɔ:: $1\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts∴ $b\ \varepsilon$ N . $b\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts :Ɔ: $b + 1\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts∴ ($[b\ \varepsilon]$ Ts) [k] P 9 ::Ɔ: N Ɔ $[b\ \varepsilon]$ Ts. (L 50) ::Ɔ: $b\ \varepsilon$ N .Ɔ Ts. (3)

(3) . (L 42) :Ɔ: $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ. Tesis. (Teor.).

20. *Def.* $a + b + c = (a + b) + c$.

21. $a, b, c\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a + b + c\ \varepsilon$ N.

22. $a, b, c\ \varepsilon$ N .Ɔ: $a = b$.=. $a + c = b + c$.

Prueba: $a, b\ \varepsilon$ N . P 7 :Ɔ. $1\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts. (1)

$a, b\ \varepsilon$ N . Ↄ:: $c\ \varepsilon$ N . $c\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts ∴Ↄ∴ $a = b$.=. $a + c = b + c$: $a + c, b + c\ \varepsilon$ N : $a + c = b + c$.=. $a + c + 1 = b + c + 1$ ∴Ↄ∴ $a = b$.=. $a + (c + 1) = b + (c + 1)$ ∴Ↄ∴ $(c + 1)\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts. (2)

$a, b\ \varepsilon$ N . (1) . (2) :Ↄ:: 1 $\varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts∴ $c\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts .Ↄ. $(c + 1)\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts ::Ↄ:: $c\ \varepsilon$ N .Ↄ. Ts. (3)

(3) Ↄ Teor.

23. $a, b, c\ \varepsilon$ N .Ↄ. $a + (b + c) = a + b + c$.

Prueba: $a, b\ \varepsilon$ N . P 18 . P 20 :Ↄ. 1 $\varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts. (1)

$a, b\ \varepsilon$ N .Ↄ∴ $c\ \varepsilon$ N . $c\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts :Ↄ: $a + (b + c) = a + b + c$. P 7 :Ↄ: $a + (b + c) + 1 = a + b + c + 1$. P 18 :Ↄ: $a + (b + (c + 1)) = a + b + (c + 1)$:Ↄ. $c + 1\ \varepsilon\ [c\ \varepsilon]$ Ts. (2)

(1) (2) (P 9) .Ↄ. Teor.

24. $a\ \varepsilon$ N .Ↄ. $1 + a = a + 1$.

Prueba: P 2 .Ↄ. 1 $\varepsilon\ [a\ \varepsilon]$ Ts. (1)

$a\ \varepsilon$ N . $a\ \varepsilon\ [a\ \varepsilon]$ Ts :Ↄ: $1 + a = a + 1$:Ↄ: $1 + (a + 1) = (a + 1) + 1$:Ↄ: $(a + 1)\ \varepsilon\ [a\ \varepsilon]$ Ts. (2)

(1) (2) .Ↄ. Teor.

24´. $a, b\ \varepsilon$ N .Ↄ. $1 + a + b = a + 1 + b$.

Prueba: Hip. P 24 :Ↄ: $1 + a = a + 1$. P 22 :Ↄ. Tesis.

25. $a, b\ \varepsilon$ N .Ↄ. $a + b = b + a$.

Prueba: $a\ \varepsilon$ N . P 24 :Ↄ: 1 $\varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts. (1)

$a\ \varepsilon$ N .Ↄ∴ $b\ \varepsilon$ N . $b\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts :Ↄ: $a + b = b + a$. P 7 :Ↄ: $(a + b) + 1 = (b + a) + 1$. $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$. $(b + a) + 1 = 1 + (b + a)$. $1 + (b + a) = (1 + b) + a$. $(1 + b) + a = (b + 1) + a$:Ↄ: $a + (b + 1) = (b + 1) + a$:Ↄ: $(b + 1)\ \varepsilon\ [b\ \varepsilon]$ Ts. (2)

(1) (2) .Ɔ. Teor.

26. $a, b, c\ \varepsilon$ N .Ɔ: $a = b$.=. $c + a = c + b$.

27. $a, b, c\ \varepsilon$ N .Ɔ: $a + b + c = a + c + b$.

28. $a, b, c, d\ \varepsilon$ N . $a = b$. $c = d$:Ɔ. $a + c = b + d$.

§ 2. SUSTRACCIÓN

Explicaciones

El signo $-$ se lee como *menos*.

El signo $<$ se lee como *es menor que*.

El signo $>$ se lee como *es mayor que*.

Definiciones

1. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ: $b - a$ = N [$x\ \varepsilon$] ($x + a = b$).
2. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ: $a < b$.=. $b - a\ - = \Lambda$.
3. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ: $b > a$.=. $a < b$.

$$a+b-c=(a+b)-c;\ a-b+c=(a-b)+c;\ a-b-c=(a-b)-c.$$

§ 4. MULTIPLICACIÓN

Definiciones

1. $a\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a\times 1=a$.
2. $a, b\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a\times(b+1)=a\times b+a$.

$$ab=a\times b;\ ab+c=(ab)+c;\ abc=(ab)c.$$

§ 5. POTENCIAS

Definiciones

1. $a\ \varepsilon$ N .Ɔ. $a^1=a$.

2. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ. $a^{b+1} = a^b a$.

§ 6. DIVISIÓN

Explicaciones

El signo / se lee como *dividido por*.

El signo D se lee como *divide*, o *es un divisor de*.

El signo Ɑ se lee como *es un múltiplo de*.

El signo Np se lee como *número primo*.

El signo π se lee como *es primo a*.

Definiciones

1. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ. b/a = N [$x \ \varepsilon$] ($xa = b$).
2. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ: a D b .=. $b/a \ - = \Lambda$.
3. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ: b Ɑ a .=. a D b.
4. Np = N [$x \ \varepsilon$] (ʒ D x . ʒ > 1 . ε < x := Λ).
5. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ:: $a \ \pi \ b$ ∴=∴ ʒ D a . ʒ D b . ʒ > 1 := Λ.
6. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ∴ ʒ D (a, b) :=: ʒ D a .∩. ʒ D b.
7. $a, b \ \varepsilon$ N .Ɔ∴ ʒ Ɑ (a, b) :=: ʒ Ɑ a .∩. ʒ Ɑ b.

$$ab/c = (ab)/c; \ a/b/c = (a/b)/c; \ a/b \times c = (a/b)c.$$