Los principios de las matemáticas y el problema de los conjuntos

Por

Jules Richard

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: Les principes des mathématiques et le problème des ensembles

Publicado originalmente en *Revue générale des sciences pures et appliquées 16*, 541 (1905).

En su edición del 30 de marzo de 1905, la *Revue* llama la atención sobre ciertas contradicciones que se encuentran en la teoría general de conjuntos.

No es necesario ir hasta la teoría de números ordinales para encontrar tales contradicciones. Aquí hay una que se presenta en el momento en el que estudiamos el continuo y a la que probablemente algunas otras podrían reducirse.

Definiré un cierto conjunto de números, que llamaré el conjunto E, mediante las siguientes consideraciones.

Escribamos todas las permutaciones de las veintiséis letras del alfabeto francés tomadas dos a la vez, poniendo estas permutaciones en orden alfabético; luego, después de ellas, todas las permutaciones tomadas tres a la vez, en orden alfabético; luego, después de ellas, todas las permutaciones tomadas cuatro a la vez, y así sucesivamente. Estas permutaciones pueden contener la misma letra repetida varias veces; son permutaciones con repeticiones.

Para cualquier entero *p*, cualquier permutación de las veintiséis letras tomada *p* a la vez estará en la tabla; y, como todo lo que puede escribirse con un número finito de palabras es una permutación de letras, todo lo que puede escribirse estará en la tabla formada como recién hemos indicado.

La definición de un número estando compuesta por palabras, y estas palabras por letras, algunas de estas permutaciones serán definiciones de números. Tachemos de nuestras permutaciones todas aquellas que no son definiciones de números.

Sea u_1 el primer número definido por una permutación, u_2 el segundo, u_3 el tercero, y así sucesivamente.

Tenemos así, escritos en un orden definido, *todos los números que están definidos por un número finito de palabras*.

Por lo tanto, los números que pueden definirse por finitas palabras forman un conjunto numerablemente infinito.

Ahora, aquí viene la contradicción. Podemos formar un número no perteneciente a este conjunto. “Sea *p* el dígito en el *n*-ésimo lugar decimal del *n*-ésimo número del conjunto E; formemos un número teniendo 0 por su parte integral y, en su *n*-ésimo lugar decimal, $p+1$ si *p* no es 8 o 9, y 1 de otra manera.” Este número N no pertenece al conjunto E. Si fuese el *n*-ésimo número del conjunto E, el dígito en su *n*-ésimo lugar decimal sería el mismo que aquel en el *n*-ésimo lugar decimal de ese número, lo que no es el caso.

Denoto con G a la colección de letras entre comillas.

El número N está definido por las palabras de la colección G, esto es, por finitas palabras; por lo tanto, habría de pertenecer al conjunto E. Pero hemos visto que no lo hace.

Tal es la contradicción.

Mostremos que esta contradicción es sólo aparente. Volvamos a nuestras permutaciones. La colección G de letras es una de estas permutaciones; aparecerá en mi tabla. Pero, en el lugar que ocupa, no tiene significado. Menciona al conjunto E, que todavía no ha sido definido. Por lo tanto, tengo que tacharla. La colección G tiene significado sólo si el conjunto E está totalmente definido, y esto no se consigue excepto con infinitas palabras. *Por lo tanto, no hay contradicción*.

Podemos hacer una observación adicional. El conjunto conteniendo al conjunto E y al número N representa un nuevo conjunto. Este nuevo conjunto es numerablemente infinito. El número N puede ser insertado en el conjunto E en un cierto rango *k* si incrementamos por 1 el rango de cada número de rango mayor a *k*. Sigamos denotando con E al conjunto así modificado. Entonces la colección de palabras G definirá un número N´ *distinto de* N, ya que el número N ahora ocupa el rango *k* y el dígito en el *k*-ésimo lugar decimal de N´ no es igual al dígito en el *k*-ésimo lugar decimal del *k*-ésimo número del conjunto E.