Modelos y realidad

Por

Hilary Putnam

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: Models and reality

Publicado originalmente en *The Journal of Symbolic Logic* 45.3 (septiembre, 1980): 464-82. La *Association for Symbolic Logic* otorgó los permisos de traducción y publicación para esta colección.

En 1922 Skolem pronunció un discurso ante el Quinto Congreso de Matemáticas Escandinavas en el que advirtió de lo que llamó una “relatividad de nociones de la teoría de conjuntos”. Esta “relatividad” ha sido frecuentemente considerada como paradójica; pero hoy en día, aunque uno escucha la expresión “la paradoja de Löwenheim-Skolem”, parece que se piensa sólo como una paradoja *aparente*, algo que disfrutan los expertos pero que no preocupa seriamente a los mismos. Así, escribe van Heijenoort: “La existencia de tal ‘relatividad’ se refiere a veces como la paradoja de Löwenheim-Skolem, pero, desde luego, no es una paradoja en el sentido de una antinomia; es un rasgo nuevo e inesperado de los sistemas formales.” En este discurso[1] quiero retomar los argumentos de Skolem no con el propósito de refutarlos sino con el propósito de extenderlos en algo de la dirección que parecía estar indicando. No reivindico que la “paradoja de Löwenheim-Skolem” es una antinomia *en la lógica formal*; pero argumentaré que *es* una antinomia, o algo cercano a ella, en la *filosofía del lenguaje*. Más todavía, argumentaré que la resolución de la antinomia – la única resolución que puedo ver que tenga sentido – tiene profundas implicaciones para la gran disputa metafísica acerca del realismo, que siempre ha sido la disputa central en la filosofía del lenguaje.

La estructura de mi argumento será como sigue: señalaré que en muchas áreas distintas hay tres posiciones principales sobre la referencia y la verdad: está la posición platónica extrema, que postula poderes mentales no naturales para “asir” formas directamente (es característico de esta posición que “entender” o “asir” sean ellas mismas nociones irreducibles e inexplicadas); está la posición verificacionista que reemplaza la noción clásica de verdad por la noción de verificación o prueba, al menos cuando viene a describir cómo se entiende el lenguaje; y está la posición realista moderada que busca preservar la centralidad de las nociones clásicas de verdad y referencia sin postular poderes mentales no naturales. Argüiré que es, desafortunadamente, la posición realista *moderada* la que se pone en serios aprietos por el teorema de Löwenheim-Skolem y por resultados relacionados de la teoría de modelos. Finalmente, optaré por el verificacionismo como un

[1] Discurso Presidencial pronunciado ante la Reunión Invernal de la *Association for Symbolic Logic* en Washington, D. C., 29 de diciembre de 1977. Deseo agradecer a Bas van Fraassen por sus valiosos comentarios y críticas de una versión anterior de este discurso.

modo de preservar la perspectiva del realismo científico o empírico, que está totalmente desechado por el platonismo, aunque esto signifique renunciar al realismo *metafísico*.

El teorema de Löwenheim-Skolem dice que una teoría de primer orden satisfacible (en un lenguaje contable) tiene un modelo contable. Considérese la oración:

(i) $-(\exists R)$ (R es *uno-a-uno*. *El dominio de* $R \subset N$. *El rango de valores de R es S*)

donde 'N' es un término formal para el conjunto de todos los números enteros y los tres conyuntos [*conjuncts*] en la matriz tienen las obvias definiciones de primer orden.

Reemplaza 'S' por el término formal para el conjunto de todos los números reales de tu teoría de conjuntos formalizada favorita. La (i) será un *teorema* (probado por el célebre "argumento diagonal" de Cantor). De modo que tu teoría de conjuntos formalizada *dice* que un cierto conjunto (llámesele "S") es no numerable. De modo que S debe *ser* no numerable en todos los *modelos* de tu teoría de conjuntos. De modo que tu teoría de conjuntos – digamos ZF (teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel) – tiene sólo modelos no numerables. ¡Pero esto es imposible! Pues, por el teorema de Löwenheim-Skolem, *ninguna* teoría puede tener *sólo* modelos no numerables; si una teoría tiene un modelo no numerable, debe también tener modelos numerablemente infinitos. Contradicción.

La resolución de esta aparente contradicción no es difícil, como señala Skolem (y no es esta contradicción aparente a la que me referí como una antinomia, o cercana a una antinomia). Pues (i) sólo "dice" que S es no numerable cuando el cuantificador $(\exists R)$ se interpreta como extendiéndose sobre *todas* las relaciones en $N \times S$. Pero cuando elegimos un modelo *numerable* para el lenguaje de la teoría de conjuntos, "$(\exists R)$" no se extiende sobre *todas* las relaciones; se extiende sólo sobre relaciones *en el modelo*. (i) sólo "dice" que S es no numerable en un sentido *relativo*: el sentido de que los miembros de S no pueden ponerse en una correspondencia uno-a-uno con un subconjunto de N por ninguna R *en el modelo*. Un conjunto S puede ser "no numerable" en este sentido *relativo* y no obstante ser numerable "en realidad". Esto sucede cuando *hay* correspondencias uno-a-uno entre S y N pero todas ellas yacen fuera del modelo dado. Lo que es un conjunto "contable" desde el punto de vista de un modelo puede ser un conjunto incontable desde el punto de vista de otro modelo. Como lo resume Skolem: “incluso las nociones ‘finito’, ‘infinito’, ‘secuencia simplemente infinita’, etc., resultan ser meramente relativas dentro de la teoría axiomática de conjuntos”.

El problema filosófico. Hasta cierto punto, todos los comentadores están de acuerdo con la significancia de la existencia de interpretaciones “involuntarias”, p. ej., modelos en los que lo que “se supone que son” conjuntos no numerables son “en realidad” numerables. Todos los comentadores están de acuerdo con que la existencia de tales modelos muestra que la interpretación “involuntaria” o, como algunos prefieren decirlo, la “noción intuitiva de un conjunto”, no está “capturada” por el sistema formal. Pero si los *axiomas* no pueden capturar la “noción intuitiva de un conjunto”, ¿qué podría?

Aquí es relevante un hecho técnico. El teorema de Löwenheim-Skolem tiene una forma fuerte (el así llamado “teorema hacia debajo de Löwenheim-Skolem”), que requiere del axioma de elección para ser probado, y que nos dice que una teoría de primer orden satisfacible (en un lenguaje contable) tiene un modelo contable que es un submodelo de cualquier modelo dado. En otras palabras, si se nos da un modelo no numerable M para una teoría, entonces podemos encontrar un modelo contable M' de esa misma teoría en el que los símbolos predicados representen las mismas relaciones (restringidas al universo menor de la manera obvia) que representaron en el modelo original. La única diferencia entre M y M' es que el “universo” de M' – i. e., la totalidad a la que se extienden las variables de cuantificación – es un subconjunto propio del “universo” de M.

Ahora bien, el argumento ofrecido por Skolem, y que muestra que “la noción intuitiva de un conjunto” (si existe tal cosa) no está “capturada” por ningún sistema formal, muestra que incluso una *formalización de toda la ciencia* (si se pudiese construir tal cosa), o incluso una *formalización de todas nuestras creencias* (ya sea que cuenten o no como “ciencia”), no podría descartar interpretaciones numerables y, *a fortiori*, dicha formalización no podría descartar interpretaciones *involuntarias* de esta noción.

Esto muestra que las “restricciones teóricas”, ya sea que vengan de la propia teoría de conjuntos o de la “ciencia total”, no pueden fijar la interpretación de la noción de *conjunto* en el modo “pretendido”. ¿Qué hay de las “restricciones operacionales”?

Incluso si permitimos que pudiera haber un *infinito numerable* de "magnitudes" mensurables, y que cada una de ellas pudiera medirse hasta una *exactitud racional arbitraria* (que ciertamente parece una asunción utópica), ello no ayudaría. Pues, por el "teorema hacia debajo de Löwenheim-Skolem", podemos encontrar un submodelo contable del modelo "estándar" (si existe tal cosa) en el que contablemente muchos predicados (cada uno de los cuales puede tener contablemente muchas cosas en su extensión) tienen preservadas sus extensiones. En particular, podemos fijar los valores de muchas magnitudes contables a todos los puntos espacio-temporales racionales, y aún encontrar un submodelo contable que reúna todas las restricciones. En breve, ciertamente parece haber un modelo *contable* de *todo nuestro cuerpo de creencias* que reúne todas las restricciones operacionales.

El problema filosófico aparece justo en este punto. Si se nos dice que "la teoría axiomática de conjuntos no captura la noción intuitiva de un conjunto", entonces es natural pensar que *algo más* – nuestro "entendimiento" – sí la captura. Pero, ¿a qué puede llegar nuestro "entendimiento", al menos para un filósofo de mente naturalista, que sea más que *el modo en el que usamos nuestro lenguaje*? El argumento de Skolem puede extenderse, como acabamos de ver, para mostrar que el *uso total del lenguaje* (restricciones operacionales más teóricas) no "fija" una única "interpretación intencionada" más de lo que lo hace la propia teoría axiomática de conjuntos.

Esta observación puede empujar a un filósofo de las matemáticas a dos caminos distintos. Si está inclinado al platonismo, tomará esto como evidencia de que la mente tiene facultades misteriosas para "asir conceptos" (o "percibir objetos matemáticos") que el filósofo de mente naturalista nunca conseguirá explicar. Pero si está inclinado a alguna especie de verificacionismo (i. e., a identificar verdad con verificabilidad, en lugar de con alguna "correspondencia con la realidad" clásica), dirá: "¡Disparates! Todo lo que muestra la 'paradoja' es que nuestro entendimiento de 'Los números reales son no numerables' consiste en nuestro saber *qué es para esto ser probado*, y no en nuestro 'asir' un 'modelo'." En breve, las posiciones extremas – platonismo y verificacionismo – parecen recibir confort de la paradoja de Löwenheim-Skolem; es sólo la posición "moderada" (que intenta evitar “percepciones” misteriosas de “objetos matemáticos” y al mismo tiempo retener una noción clásica de la verdad) la que está en serios problemas.

Una digresión epistemológica/lógica. El problema recién señalado es un serio problema para cualquier filósofo o logicista de mente filosófica que desee ver la teoría de conjuntos como la descripción de una determinada realidad existiendo de manera independiente. Pero desde un punto de vista matemático, puede parecer irrelevante: ¿qué importa si hay muchos modelos distintos de la teoría de conjuntos, y no un único “modelo pretendido” *si todos satisfacen las mismas oraciones*? Como matemáticos, lo que queremos saber es qué oraciones de la teoría de conjuntos son verdaderas; no queremos tener a los propios conjuntos en nuestras manos.

Desafortunadamente, el argumento puede extenderse. Primero que nada, las restricciones teóricas de las que hemos estado hablando deben venir, en una visión naturalista, únicamente de dos fuentes: deben venir de algo como la decisión o convención humanas, cualquiera que sea la fuente de la “naturalidad” de las decisiones o convenciones, o de la experiencia humana, tanto experiencia con la naturaleza (que indudablemente es la fuente de nuestras “intuiciones matemáticas” más básicas, por más pasado de moda que sea decirlo), como experiencia con “hacer matemáticas”. Es difícil creer que alguna o ambas de estas fuentes juntas puedan alguna vez darnos un conjunto *completo* de axiomas para la teoría de conjuntos (ya que, por una cosa, un conjunto completo de axiomas tendría que ser no recursivo, y es difícil prever llegar a tener un conjunto no recursivo de axiomas en la literatura o en nuestras cabezas incluso en el improbable evento de que la raza humana siga haciendo teoría de conjuntos por siempre); y si un conjunto completo de axiomas es imposible, y los modelo*s* pretendido*s* (en plural) son descartados sólo por restricciones teóricas más operacionales entonces las oraciones que son independientes de los axiomas a los que llegaremos en el límite de la investigación sobre teoría de conjuntos realmente no tienen *ningún* valor de verdad determinado; sólo son verdaderas en algunos modelos pretendidos y falsas en otros.

Para mostrar qué relevancia puede tener este hecho en la investigación real sobre teoría de conjuntos, tendré que divagar por un momento en la lógica técnica. En 1938 Gödel presentó un nuevo axioma para la teoría de conjuntos: el axioma “$V = L$”. Aquí, L es la clase de todos los conjuntos constructibles, esto es, la clase de todos los conjuntos que pueden definirse por un cierto procedimiento constructivo si pretendiésemos tener nombres disponibles para todos los ordinales, por más grandes que sean. (Desde luego, este sentido de "constructible" sería un anatema para los matemáticos constructivistas.) *V* es el universo de todos los conjuntos. De modo que "*V* = *L*" sólo dice que *todos los conjuntos son constructibles*. Al considerar el modelo interno para la teoría de conjuntos en el que "*V* = *L*" es verdadero, Gödel pudo probar la consistencia relativa de ZF y ZF *más* el axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada.

"*V* = *L*" es ciertamente una oración importante, matemáticamente hablando. ¿Es *verdadera*?

Gödel consideró brevemente proponer que *añadamos* "*V* = *L*" a los axiomas aceptados para la teoría de conjuntos, como un tipo de estipulación de significado, pero pronto cambió de opinión. Su opinión posterior fue que "*V* = *L*" es *realmente* falsa, no obstante es consistente con la teoría de conjuntos, si la teoría de conjuntos es ella misma consistente.

La intuición de Gödel es ampliamente compartida por los teóricos de conjuntos. Pero, ¿tiene sentido esta "intuición"?

Sea *MAG* un conjunto contable de magnitudes físicas que incluye todas las magnitudes que seres sensitivos en este universo físico pueden realmente medir (ciertamente parece plausible que no podemos esperar medir más que un número contable de magnitudes físicas). Sea *OP* la asignación "correcta" de valores; es decir, la asignación que asigna a cada miembro de *MAG* el valor que tal magnitud realmente tiene en cada punto espacio-temporal racional. Entonces toda la información que podrían darnos las "restricciones operacionales" (y, de hecho, infinitamente más) está codificada en *OP*.

Un término técnico: un modelo-ω para una teoría de conjuntos es un modelo en el que los *números naturales* están ordenados como se "supone que son"; esto es, la secuencia de "números naturales" del modelo es una secuencia-ω.

Ahora, para un pequeño teorema.[2]

TEOREMA. *ZF más $V = L$ tiene un modelo-ω que contiene cualquier conjunto contable dado de números reales.*

PRUEBA. Ya que un conjunto contable de reales puede codificarse como un solo real mediante técnicas bien conocidas, basta con probar que *para cada real s, hay un M tal que M es un modelo-ω para ZF más $V = L$ y s está representado en M.*

Por el "teorema hacia debajo de Löwenheim-Skolem", esta declaración es verdadera si y sólo si la siguiente declaración lo es:

Para cada real s, hay un M contable tal que M es un modelo-ω para ZF más $V = L$ y s está representado en M.

Las estructuras contables con la propiedad de que los "números naturales" de la estructura forman una secuencia-ω pueden codificarse como reales mediante técnicas estándar. Cuando esto se hace correctamente, el predicado "*M es un modelo-ω para ZF más $V = L$ y s está representado en M*" se vuelve un predicado *aritmético* de dos lugares de *reales M*, *s*. Así, la oración anterior tiene la forma lógica (*para cada real s*) (*hay un real M*) (…*M*, *s*,…). En breve, la oración es una oración-$\prod_2$.

Ahora, considérese esta oración *en el modelo interno $V = L$*. Para cada *s en el modelo interno* – esto es, para cada *s* en *L* – hay un modelo – a saber, el propio *L* – que satisface "$V = L$" y contiene *s*. Por el teorema hacia debajo de Löwenheim-Skolem, hay un submodelo contable que es elementalmente equivalente a *L* y contiene *s*. (Estrictamente hablando, aquí necesitamos no sólo el teorema hacia debajo de Löwenheim-Skolem, sino la construcción "Skolem hull" que se utiliza para probar dicho teorema.) Por el trabajo de Gödel, este submodelo contable yace él mismo en *L*, y como fácilmente se verifica, también lo hace el real que lo codifica. Así que la oración-$\prod_2$ anterior es verdadera en el modelo interno $V = L$.

[2] Barwise (1971) ha probado el teorema mucho más fuerte de que cada modelo contable de ZF tiene una propia extensión final que es un modelo de ZF + $V = L$. El teorema en el texto fue probado por mí antes de 1963.

Pero Schoenfield ha probado que las oraciones-$\prod_2$ son *absolutas*: si una oración-$\prod_2$ es verdadera en *L*, entonces debe ser verdadera en *V*. De modo que la oración anterior es verdadera en *V*. □

Lo que hace asombroso a este teorema es la siguiente reflexión: supóngase que Gödel tiene razón, y "*V* = *L*" es *falso* ("en realidad"). Supóngase que hay, de hecho, un *número real no-constructible* (como también cree Gödel). Ya que el predicado "es constructible" es absoluto en *modelos-*β – esto es, en modelos en los que los "buen-ordenamientos" *relativos al modelo* son buen-ordenamientos "en realidad" (¡recuérdese la "relatividad de las nociones de la teoría de conjuntos" de Skolem!), ningún modelo conteniendo tal *s* no constructible puede satisfacer "*s* es constructible" y ser un *modelo-*β. Pero, por el teorema anterior, un modelo conteniendo *s puede* satisfacer "*s* es constructible" (porque satisface "*V* = *L*", y "*V* = *L*" dice que *todo* es constructible) y ser un *modelo-*ω.

Ahora, supóngase que formalizamos *todo el lenguaje de la ciencia* dentro de la teoría de conjuntos ZF *más V* = *L*. Cualquier modelo para ZF que contenga un conjunto abstracto isomorfo a *OP* puede extenderse a un modelo para este lenguaje formalizado de la ciencia que sea *estándar con respecto a OP* – por lo tanto, incluso si *OP* es no constructible "en realidad", podemos encontrar un modelo *para todo el lenguaje de la ciencia* que satisfaga *todo es constructible* y que asigne los valores correctos a todas las magnitudes físicas en *MAG* en todos los puntos espacio-temporales racionales.

La alegación que hace Gödel es que "*V* = *L*" es falsa "en realidad". Pero, ¿qué diantres puede significar esto? Debe significar, por lo menos, que en el caso recién concebido, el modelo que hemos descrito en el que "*V* = *L*" vale no sería *el modelo pretendido*. Pero, ¿por qué no? Satisface todas las restricciones teóricas; y hemos ido muy lejos para asegurarnos de que también satisface todas las restricciones operacionales.

Quizá alguien dirá que "$V \neq L$" (o algo que implique que *V* no es igual a *L*) habría de añadirse a los axiomas de ZF como una "restricción teórica" adicional. (Gödel a menudo habla de nuevos axiomas que algún día se harán evidentes.) Pero, mientras que esto puede ser aceptable desde un punto de vista no realista, difícilmente puede ser aceptable desde un punto de vista realista. Pues el punto de vista realista es que hay *un hecho de la cuestión* – un hecho independiente de nuestra legislación – en cuanto a si $V = L$ o no. Un realista como Gödel sostiene que tenemos acceso a una “interpretación pretendida” de ZF, donde el acceso no se da simplemente por estipulación lingüística.

Lo que el argumento de arriba muestra es que si la “interpretación pretendida” está fijada sólo por restricciones teóricas más operacionales, entonces si “$V \neq L$” no se sigue de tales restricciones – si no *decidimos* hacer $V = L$ verdadero o hacer $V = L$ falso – entonces habrá modelos “pretendidos” en los que $V = L$ es *verdadero*. Si estoy en lo cierto, entonces la “relatividad de las nociones de la teoría de conjuntos” se extiende a una *relatividad del valor de verdad de* “$V = L$” (y, por argumentos similares, del axioma de elección y la hipótesis del continuo también).

Restricciones operacionales y contrafácticos. Puede parecer a algunos que hay una equivocación mayor en la noción de lo que *puede* ser medido, u observado, que pone en peligro la aparentemente crucial demanda de que la evidencia que *podríamos* tener equivale a lo mucho a hechos numerables. Imaginemos un aparato de medición que simplemente detecte la presencia de una partícula dentro de un volumen finito *dv* alrededor de su propio centro geométrico durante cada minuto completo de su reloj. Ciertamente aparecerá con, a lo mucho, reportes numerables (cada uno *sí* o *no*), incluso si se le deja funcionando por siempre. Pero, ¿cuántos son los hechos que *podría* reportar? Pues bien, si se zarandeara un poco, digamos por azar, su centro geométrico variaría r centímetros en una dirección dada. Entonces reportaría hechos totalmente distintos. Ya que para cada número r podría zarandearse de ese modo, el número de reportes que podría producir es no-numerable – y para esto no importa que nosotros, y el propio aparato, seamos incapaces de distinguir cada número real r de cada otro. El problema es simplemente el alcance de la palabra modal “puede”. En mi argumento, debo estar identificando lo que llamo restricciones observacionales no con la totalidad de hechos que podrían ser registrados por observación – i. e., unos que o bien serán registrados, o serían registrados si ocurriesen ciertas perturbaciones azarosas – sino con la totalidad de hechos que en realidad serán registrados u observados, cualesquiera que sean.

En respuesta, señalaría que incluso si el aparato de medición *fuese* zarandeado *r* centímetros en una dirección dada, sólo podríamos conocer al número real *r* hasta alguna aproximación racional. Ahora, si los intervalos involucrados son todos racionales, sólo hay hechos *contables* de la forma: *si la acción A* (una acción descrita con respecto al lugar, tiempo, y carácter hasta alguna "tolerancia" finita) fuese realizada, entonces el resultado $r \pm \in$ (un resultado descrito hasta alguna tolerancia racional) *se obtendría con probabilidad en el intervalo a, b*. Conocer todos los hechos de esta forma sería conocer la *distribución de probabilidad* de todos los posibles resultados observables de todas las posibles acciones. Nuestro argumento muestra que podría construirse un modelo que concuerde con todos estos hechos.

Hay, no obstante, un punto más profundo a hacerse sobre esta objeción. Supóngase que "primero-ordenamos" ["first orderize"] el habla contrafáctica, digamos, al incluir *eventos* en la ontología de nuestra teoría e introducir un predicado ("subjuntivamente necesita") para la conexión contrafáctica entre tipos de eventos no realizados en un tiempo-lugar dado. Entonces nuestro argumento muestra que existe un modelo que ajusta todos los hechos que realmente serán registrados u observados y ajusta nuestras restricciones teóricas, y este modelo *induce* una interpretación del idioma contrafáctico (una "métrica de similitud sobre mundos posibles", en la teoría de David Lewis) que hace verdaderos justamente a los contrafácticos que son verdaderos de acuerdo con alguna terminación de nuestra teoría. Así, apelar a observaciones contrafácticas no puede descartar ningunos modelos en absoluto, a menos que la interpretación del idioma contrafáctico *ya esté* ella misma fijada por algo más allá de restricciones operacionales y teóricas.

(Un punto relacionado es hecho por Wittgenstein en sus *Investigaciones Filosóficas*: hablar sobre lo que una máquina ideal – o Dios – podría computar es hablar *dentro de* las matemáticas – disfrazadas – y no puede servir para fijar la interpretación de las matemáticas. "Dios", también, tiene muchas interpretaciones.)

"Decisión" y "convención". He utilizado la palabra "decisión" en conexión con cuestiones abiertas de la teoría de conjuntos, y obviamente es una mala palabra. Uno no puede simplemente sentarse en su estudio y "decidir" que "$V = L$" ha de ser verdadero, o que el axioma de elección ha de ser verdadero. Ni tampoco sería apropiado que la comunidad

matemática convoque una convención internacional y legisle sobre estos asuntos. Empero, me parece que si encontrásemos una especie extraterrestre de seres inteligentes que hayan desarrollado un alto nivel de matemáticas, y resultara que *rechazan* el axioma de elección (quizás debido al teorema de Tarski-Banach),[3] sería incorrecto considerarlos como que simplemente están cometiendo un *error*. Hacer *eso* equivaldría, en mi opinión, a decir que la aceptación del teorema de elección está integrada en nuestra propia noción de racionalidad; no me parece que ese sea el caso. Para estar seguros, nuestra aceptación de elección no es arbitraria; todos los tipos de "intuiciones" (basadas, lo más probable, en la experiencia con lo finito) la apoyan; su fecundidad matemática la apoya; pero ninguna de éstas es *tan* fuerte que podríamos decir que una cultura igualmente exitosa que basase *sus* matemáticas en principios *incompatibles* con la elección (e. g., en el llamado axioma de determinación)[4] fuese *irracional*.

Pero si ambos sistemas de la teoría de conjuntos – el nuestro y el de los extraterrestres – cuentan como *racionales*, ¿qué sentido tiene llamar a uno *verdadero* y al otro *falso*? Desde el punto de vista platónico, no hay problema en responder esta pregunta. "El axioma de elección es verdadero – verdadero en *el* modelo", dirá (si cree el axioma de elección). "Nosotros estamos en lo cierto y los extraterrestres están equivocados." Pero, ¿cuál es *el* modelo? Si el modelo pretendido es descartado por restricciones teóricas y operacionales, entonces, primero, "el" modelo pretendido es plural y no singular (de modo que el "el" es inapropiado – nuestras restricciones teóricas y operacionales ajustan muchos modelos, no sólo uno, y así lo hacen aquellas [restricciones] de los extraterrestres, como vimos antes). Segundo, los modelos pretendidos sí satisfacen para nosotros el axioma de elección y los modelos extraterrestremente pretendidos no lo hacen; no estamos hablando

[3] Esta es una consecuencia muy contraintuitiva del axioma de elección. Llámese a dos objetos *A*, *B* "congruentes por descomposición finita" si pueden ser divididos en finitos conjuntos disjuntos de puntos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$, tales que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, y (para $i = 1, 2, \ldots, n$) A_i es congruente con B_i. Entonces Tarski y Banach mostraron que *todas las esferas son congruentes por descomposición finita*.

[4] Este axioma, estudiado primeramente por J. Mycielski (1964), afirma que juegos infinitos con información perfecta están determinados, i. e., hay una estrategia ganadora para el primer o el segundo jugador. El AD (axioma de determinación) implica la existencia de una medida no trivial de dos valores contablemente aditiva sobre los números reales, contradiciendo una consabida consecuencia del axioma de elección.

acerca de los mismos modelos, de modo que no hay cuestión de un "error" en una parte o la otra.

El platónico responderá que lo que esto realmente muestra es que tenemos alguna misteriosa facultad para "asir conceptos" (o "intuir objetos matemáticos") y es *esto* lo que nos permite fijar un modelo como *el* modelo, y no sólo restricciones operacionales y teóricas; pero esta apelación a misteriosas facultades me parece tanto inútil como epistemología como poco convincente como ciencia. Después de todo, ¿qué proceso neural podría describirse como la percepción de un objeto matemático? ¿Por qué de *un* objeto matemático en lugar de otro? No dudo que *algunos* axiomas matemáticos estén incorporados en nuestra noción de racionalidad ("cada número tiene un sucesor"); pero, si el axioma de elección y la hipótesis del continuo no lo están, entonces estoy sugiriendo que el argumento de Skolem, o la precedente extensión de él, arroja dudas sobre la posición de que estas declaraciones tienen un valor de verdad independiente de la teoría en la que están incrustadas.

Ahora, supóngase que esto es correcto y que el axioma de elección es verdadero cuando es tomado en el sentido que recibe desde *nuestra* teoría que incrusta y falso cuando es tomado en el sentido que recibe desde la teoría extraterrestre. Instar este relativismo no es abogar por un relativismo *desenfrenado*; no dudo que hayan algunos cánones objetivos (si están evolucionando) de racionalidad; simplemente dudo que los consideraríamos como si solucionaran este tipo de cuestión, ya no digamos como si singularizaran *una* única "teoría de conjuntos racionalmente aceptable". Si esto es correcto, entonces uno está inclinado a decir que los extraterrestres han decidido dejar que el axioma de elección sea falso y nosotros hemos decidido dejar que sea verdadero; o que tenemos distintas "convenciones"; pero, desde luego, ninguna de estas palabras es literalmente correcta. Bien puede ser el caso que la idea de que las declaraciones tienen sus valores de verdad *independientes* de la teoría que incrusta esté tan profundamente incorporada en nuestros modos de hablar que simplemente no haya palabra o frase corta del "lenguaje ordinario" que se refiera a la teoría-dependencia del significado y la verdad. Quizás es por esto por lo que Poincaré fue conducido a exclamar "¡Convención, sí! ¡Arbitraria, no!" cuando estaba intentando expresar una idea similar en otro contexto.

¿Es el problema un problema con la noción de un "conjunto"? Sería natural suponer que el problema que señala Skolem, el problema de una sorprendente "relatividad" en nuestras nociones, tiene que ver con la noción de un "conjunto", dados los diversos problemas que se *sabe* rodean a *esa* noción, o, al menos, tiene que ver con el problema de referencia a "objetos matemáticos". Pero esto no es así.

Para ver por qué no es así, consideremos brevemente el molesto problema de la referencia a entidades teóricas en la ciencia física. Aunque éste puede parecer ser un problema más para filósofos de la ciencia o filósofos del lenguaje que para lógicos, es un problema cuyos aspectos lógicos frecuentemente han sido de interés para los lógicos, como lo atestiguan las expresiones "oración de Ramsey", "traducción de Craig", etc. Aquí otra vez el realista – o, al menos, el realista metafísico duro – desea que sea el caso de que *verdad* y *aceptabilidad racional* sean nociones *independientes*. Desea que sea el caso de que lo que, e. g., los electrones *son* sea distinto (y posiblemente diferente) de lo que creemos que son o incluso de lo que creeríamos que son dados los mejores experimentos y la teoría epistémicamente mejor. Una vez más, el realista – el realista metafísico duro – sostiene que nuestras intenciones singularizan "el" modelo, y que nuestras creencias son entonces o verdaderas o falsas en "el" modelo *ya sea que podamos encontrar sus valores de verdad o no.*

Para ver el peso del teorema de Löwenheim-Skolem (o del íntimamente relacionado teorema de completitud de Gödel y sus generalizaciones modelo-teóricas) sobre este problema, hagamos una vez más un poco de construcción de modelos. Esta vez, las restricciones operacionales tendrán que manejarse con un poco más de delicadeza, ya que tenemos necesidad de distinguir conceptos operacionales (conceptos que describen lo que vemos, sentimos, escuchamos, etc., mientras realizamos varios experimentos, y también conceptos que describen nuestros actos de recoger, empujar, jalar, girar, mirar, oler, escuchar, etc.) de conceptos no-operacionales.

Para describir nuestras restricciones operacionales necesitaremos tres cosas. Primero, tendremos que fijar un "vocabulario observacional" suficientemente grande. Como el "vocabulario observacional" de los empiristas lógicos, querremos incluir en este conjunto – llámesele el conjunto de "términos-O" – palabras como "rojo", "toca", "duro", “empujar”, “mirar”, etc. Segundo, asumiremos que *existe* (ya sea que podamos definirlo o no) un conjunto de *S* que puede tomarse para ser el conjunto de cosas y eventos macroscópicamente observables (observables con el sensorio humano, eso significa). La noción de una cosa o evento observable es ciertamente vaga; así que querremos que *S* sea un conjunto generoso, esto es, Dios ha de errar en la dirección de contar demasiadas cosas y eventos como “observables para humanos” cuando Él define el conjunto *S*, si es necesario errar en cualquier dirección, antes que errar en la dirección de dejar fuera algunas cosas [y eventos] que podrían contarse como “observables” al límite. Si uno es un realista, entonces tal conjunto *S* debe existir, desde luego, incluso si nuestro conocimiento del mundo y el sensorio humano no *nos* permiten definirlo ahora. La razón por la que permitimos que *S* contenga eventos (y no solamente cosas) es que, como ha señalado Richard Boyd, algunas de las entidades que podemos observar directamente son *fuerzas* – podemos *sentir* fuerzas – y las fuerzas no son objetos. Pero asumo que las fuerzas pueden interpretarse como predicados de cualesquiera objetos, e. g., nuestros cuerpos, o de eventos adecuados.

La tercera cosa que asumiremos dada es una valuación (llámesele, una vez más, “*OP*”) que asigna el valor de verdad correcto a cada término-O de *n*-lugar (para $n = 1, 2, 3, \ldots$) en cada *n*-tupla de elementos de *S* en los que esté definido. En general, los términos-O también están definidos sobre cosas no en *S*; por ejemplo, dos moléculas demasiado pequeñas para ser vistas a ojo desnudo pueden tocarse, una mota de polvo demasiado pequeña para ser vista puede ser negra, etc. Así, *OP* es una valuación *parcial* en un sentido doble; está definida sólo sobre un subconjunto de los predicados del lenguaje, a saber, los términos-*O*, e incluso sobre éstos fija sólo una parte de la extensión, a saber, la extensión de $T \upharpoonright S$ (la restricción de *T* a *S*), para cada término-*O* *T*.

Una vez más, es la valuación *OP* la que captura nuestras “restricciones operacionales”. De hecho, las captura “desde arriba”, ya que bien puede contener *más* información de la que podríamos realmente obtener al utilizar nuestros cuerpos y nuestros sentidos en el mundo.

¿Qué haremos con las “restricciones teóricas”? Asumamos que existe una posible formalización de toda la ciencia actual, llamémosle ‘*T*’, y también que existe una posible formalización de la teoría científica *ideal*, llamémosle 'T_I'. T_I ha de ser "ideal" en el sentido de ser *epistémicamente* ideal *para humanos*. La idealidad, en este sentido, es una noción bastante vaga; pero asumiremos que, cuando Dios constituye T_I, Él construye una teoría que sería racional aceptar por parte de los científicos, o que es un límite de teorías que sería racional aceptar, a medida que se acumula más y más evidencia, y también que constituye una teoría que es compatible con la valuación *OP*.

Ahora, la teoría *T* está, podemos suponer, bien confirmada en el presente, y por tanto es racionalmente aceptable sobre la evidencia que tenemos *ahora*; pero hay un sentido claro en el que puede ser falsa. En efecto, bien puede conducir a predicciones falsas, y así entrar en conflicto con *OP*. Pero T_I, por hipótesis, no lleva a ningunas predicciones falsas. Con todo, el realista metafísico clama – y es justo este reclamo el que lo hace un realista *metafísico* en contraposición a un realista empírico – que T_I puede ser, en realidad, falsa. Lo que no es conocible como verdadero puede no obstante ser verdadero; lo que es epistémicamente más justificable para creer puede no obstante ser falso, sobre este tipo de perspectiva realista. La sorprendente conexión entre temas y debates en la filosofía de la ciencia y temas y debates en la filosofía de las matemáticas es que este tipo de realismo se tropieza con *precisamente* las mismas dificultades con las que vimos que se tropieza el platonismo. Hagamos una pausa para verificar esto.

Ya que la teoría ideal T_I debe tener, cualesquiera otras propiedades que pueda o no tener, la propiedad de ser *consistente*, se sigue del teorema de completitud de Gödel (cuya prueba, como saben todos los lógicos, está íntimamente relacionada con una de las pruebas de Skolem para el teorema de Löwenheim-Skolem) que T_I tiene modelos. Asumiremos que T_I contiene un término primitivo o definido denotando a cada miembro de *S*, el conjunto de "cosas y eventos observables". La asunción que hicimos, que T_I concuerda con *OP*, significa que todas aquellas oraciones acerca de miembros de *S* que requiere *OP* para ser verdadera son teoremas de T_I. Así, si *M* es cualquier modelo de T_I, *M* debe tener un miembro correspondiendo a cada miembro de *S*. Incluso podemos reemplazar a cada miembro de *M* que corresponda a un miembro de *S* por ese mismo miembro de *S*, modificando en consecuencia la interpretación de las letras de predicado, y obtener un modelo *M'* en el que cada término denotando a un miembro de *S* en la interpretación "pretendida" denote a ese miembro de *S*. Entonces la extensión de cada término-*O* en ese modelo será parcialmente correcta en la medida determinada por *OP*: esto es, todo lo que *OP* "dice" que está en la extensión de $\underline{P}$ está en la extensión de $\underline{P}$, y todo lo que *OP* "dice" que está en la extensión del complemento de $\underline{P}$ están en la extensión del complemento de $\underline{P}$, para cada término-*O*, en un modelo así. En breve, tal modelo es estándar con respecto a $P \upharpoonright S$ (*P* restringida a *S*) para cada término-*O* *P*.

Ahora, dicho modelo satisface todas las restricciones operacionales, ya que concuerda con *OP*. Satisface aquellas restricciones teóricas que impondríamos en el límite ideal de investigación. Así que, una vez más, parece como si cualquier modelo así es "pretendido", ¿pues qué otra cosa que esto podría descartar un modelo como "pretendido"? Pero si esto es lo que *es* ser un "modelo pretendido", T_I debe ser *verdadera*, ¡verdadera en todos los modelos pretendidos! El reclamo del realista metafísico de que incluso la teoría ideal T_I podría ser falsa "en realidad" parece colapsar en la ininteligibilidad.

Por supuesto, podría contenderse que "verdadero" no se sigue de "verdadero en todos los modelos pretendidos". Pero "verdadero" es lo mismo que "verdadero en la *interpretación* pretendida" (o "en *todas* las interpretaciones pretendidas", si puede haber más de una interpretación pretendida – o permitida – por el hablante), en cualquier perspectiva. De modo que para seguir esta línea – que en mi opinión es de hecho la correcta – se necesita desarrollar una teoría en la que las interpretaciones estén especificadas *de otra manera* que especificando modelos.

Una vez más, algunos hacen una apelación a poderes misteriosos de la mente. Chisholm (siguiendo la tradición de Brentano) sostiene que la mente tiene una facultad para *referirse a objetos externos* (o quizás a propiedades externas) que llama con el buen viejo nombre de "intencionalidad". Una vez más, la mayoría de los filósofos de mente naturalista (y, desde luego, los psicólogos), encuentran la postulación de inexplicadas facultades mentales como inútil epistemología y también, casi con total seguridad, como mala ciencia.

Hay dos principales tendencias en la filosofía de la ciencia (titubeo en llamarlas "perspectivas", porque cada tendencia está representada por muchas perspectivas detalladas distintas) acerca del modo en el que se fija la referencia de términos teóricos. De acuerdo con una tendencia, que podemos llamar la tendencia de Ramsey, y cuyas varias versiones constituyeron la perspectiva recibida por muchos años, los términos teóricos vienen en montones o aglomeraciones. Cada aglomeración – por ejemplo, la aglomeración consistiendo en los primitivos de la teoría electromagnética – está definida por una teoría, en el sentido de que todos los modelos de dicha teoría que son estándar en los términos de observación cuentan como modelos pretendidos. La teoría es "verdadera" sólo en caso de que tenga un modelo así. (La "oración de Ramsey" de la teoría es sólo la oración de segundo orden que afirma la existencia de un modelo así.) Una versión sofisticada de esta perspectiva, que equivale a relativizar la oración de Ramsey a un conjunto abierto de "aplicaciones pretendidas", ha sido recientemente promovida por Joseph Sneed.

La otra tendencia es la tendencia realista. A pesar de que los realistas difieren entre sí incluso más que los proponentes de la (primera) perspectiva recibida, se unen en aceptar que una teoría puede tener una oración de Ramsey verdadera y no ser (en realidad) verdadera.

La primera de las dos tendencias que describí, la tendencia de Ramsey, representada en Estados Unidos por la escuela de Rudolf Carnap, aceptó la "relatividad de nociones teóricas", y abandonó las intuiciones realistas. La segunda tendencia es más compleja. Su, por así decirlo, ala conservadora, representada por Chisholm, se une a Platón y a los antiguos al postular poderes misteriosos con los que la mente "asga" ["grasps"] conceptos, como ya hemos dicho. Si tenemos más a nuestra disposición con lo que fijar al modelo pretendido que meramente restricciones teóricas y operacionales, entonces el problema desaparece. El ala pragmatista radical, representada quizás por Quine, está dispuesta a renunciar a la intuición de que T_I podría ser falsa "en realidad". Esta ala radical es "realista" en el sentido de estar dispuesta a afirmar que la ciencia actual, tomada más o menos en valor nominal (i. e., sin reinterpretación filosófica), es al menos aproximadamente verdadera; "realista" en el sentido de considerar la referencia como trans-teórica (una teoría con una oración de Ramsey verdadera puede ser falsa, porque una investigación posterior puede establecer como mejor a una teoría incompatible); pero no realista *metafísico*. Es el "centro" moderado de la tendencia realista, el centro al que le gustaría aferrarse al realismo metafísico *sin* postular poderes misteriosos de la mente el que está una vez más en serios problemas.

Empujando el problema hacia atrás: la skolemización de absolutamente todo. Hemos visto que las cuestiones en la filosofía de la ciencia que tienen que ver con la referencia de términos teóricos y las cuestiones en la filosofía de las matemáticas que tienen que ver con el problema de singularizar un único "modelo pretendido" para la teoría de conjuntos están ambas conectadas con el teorema de Löwenheim-Skolem y su pariente cercano, el teorema de completitud de Gödel. Las cuestiones que tienen que ver con la referencia también surgen en la filosofía en conexión con datos sensoriales [sense data] y objetos materiales y, una vez más, éstos se conectan con los problemas modelo-teóricos que hemos venido discutiendo. (De alguna manera, realmente parece que la paradoja de Skolem subyace tras los problemas *característicos* de la filosofía del siglo XX.)

Aunque el filósofo John Austin y el psicólogo Fred Skinner intentaron expulsar de la existencia a los datos sensoriales, me parece que la mayoría de los filósofos y psicólogos piensan que hay tales cosas como *sensaciones*, o *qualia*. Pueden no ser objetos de la percepción, como alguna vez se pensó (cada vez está más de moda verlas como estados o condiciones del sujeto sintiente, como Reichenbach recomendó que hiciéramos hace mucho); podemos no tener conocimiento incorregible acerca de ellas; pueden ser entidades un tanto mal definidas en lugar de particulares perfectamente nítidos por los que alguna vez se tomaron; pero parece razonable sostener que son parte de la materia legítima de la psicología y filosofía cognitivas, y no meras pseudo-entidades inventadas por mala psicología y mala filosofía.

Aceptando esto, y tomando a las restricciones operacionales esta vez para ser que deseamos que la teoría ideal prediga correctamente todos los datos sensoriales, se ve fácilmente que el argumento anterior puede repetirse aquí, esta vez para mostrar que (si los modelos "pretendidos" son aquellos que satisfacen las restricciones operacionales y teóricas que tenemos ahora, o incluso las restricciones operacionales y teóricas que impondríamos en algún límite) entonces, o bien la teoría presente es "verdadera", en el sentido de ser “verdadera en todos los modelos pretendidos”, siempre que no lleve a predicciones falsas sobre los datos sensoriales, o bien la teoría ideal es “verdadera”. La primera alternativa corresponde a tomar las restricciones teóricas para ser representadas por la teoría actual; la segunda alternativa corresponde a tomar las restricciones teóricas para ser representadas por la teoría ideal. Sin embargo, esta vez será el caso que incluso términos refiriéndose a objetos materiales ordinarios – términos como “gato” y “perro” – se interpretan diferentemente en los diferentes modelos “pretendidos”. Parece, esta vez, como si no podamos siquiera referirnos a objetos físicos ordinarios de tamaño mediano excepto como constructos formales variadamente interpretados en varios modelos.

Más todavía, si concordamos con Wittgenstein en que la *relación de similitud* entre datos sensoriales que tenemos en distintos tiempos no es en sí algo presente en mi mente – que “fijar la atención de uno” en un dato sensorial y pensar “con ‘rojo’ quiero decir cualquier cosa que sea como *esto*” realmente no elige ninguna relación de similitud en absoluto – y hacemos el movimiento natural de suponer que los modelos pretendidos de mi lenguaje cuando ahora yo y en el futuro hablo de los datos sensoriales que tuve en algún tiempo pasado t_0 están singularizados por restricciones operacionales y teóricas, entonces, otra vez, resultará que mis datos sensoriales *pasados* son meros constructos formales que son diferentemente interpretados en varios modelos. Si además concordamos con Wittgenstein en que la noción de verdad requiere un lenguaje *público* (o al menos requiere estados del yo en más de una ocasión – que un “lenguaje privado para un presente especioso” no tiene sentido), entonces incluso mis datos sensoriales *presentes* están en este mismo barco…. En breve, uno puede “skolemizar” absolutamente todo. Parece ser absolutamente imposible fijar una referencia determinada (sin apelar a poderes mentales no naturales) para *cualquier* término en absoluto. ¿Si aplicamos el argumento al propio metalenguaje que utilizamos para hablar sobre el predicamento…?

El mismo problema ha emergido recientemente incluso en el campo de la psicología cognitiva. El modelo estándar para el cerebro/mente en este campo es la máquina de computar moderna. Esta máquina de computar está pensada como teniendo algo análogo a un lenguaje formalizado en el que computa. (Este hipotético lenguaje cerebral incluso ha recibido un nombre: “mentalés”.) Lo que hace al modelo de la psicología cognitiva un modelo *cognitivo* es que el “mentalés” está pensado para ser un medio por el que el cerebro construye una *representación interna* del mundo externo. Esta idea se tropieza inmediatamente con el siguiente problema: si el “mentalés” ha de ser un vehículo para describir el mundo externo, entonces las diversas letras de predicado deben tener extensiones que son conjuntos de cosas externas (o conjuntos de *n*-tuplas de cosas externas). Pero si el modo en el que el “mentalés” es “entendido” por las profundas estructuras en el cerebro que computan, registran, etc., en este “lenguaje” se da *vía* lo que la gente de inteligencia artificial llama “semántica procedimental” – esto es, si el *programa para usar* “mentalés” del cerebro comprende todo su “entendimiento” de “mentalés” – donde el programa para usar “mentalés”, como cualquier programa, se refiere sólo a lo que está *dentro* de la computadora – entonces, ¿cómo entran en escena las *extensiones*? En la terminología que he venido empleando en este discurso, el problema es este: si la extensión de predicados en “mentalés” está fijada por las restricciones teóricas y operacionales “cableado en” al cerebro, o incluso por restricciones teóricas y operacionales tales que ello evoluciona en el curso de la investigación, entonces éstas no fijarán una extensión *determinada* para ningún predicado. Si pensar se hace en última instancia en “mentalés”, entonces *ningún concepto que tenemos tendrá una extensión determinada*. O así parece.

La pertinencia de las teorías causales de la referencia. El término “teoría causal de la referencia” fue originalmente aplicado a mi teoría de la referencia de términos de tipo natural y a la teoría de la referencia de Kripke acerca de los nombres propios. Estas teorías no intentaban *definir* la referencia, sino más bien intentaban decir algo acerca de cómo se fija la referencia, si no está fijada por asociar descripciones definidas con los términos y nombres en cuestión. Kripke y yo argumentamos que la intención por preservar la referencia mediante una cadena histórica de usos y la intención por cooperar socialmente en la fijación de referencia hacen posible utilizar exitosamente términos para referir, aunque no esté asociada ninguna descripción definida con ningún término por todos los hablantes que utilizan dicho término. Estas teorías asumen que pueden singularizarse individuos para el propósito de una “ceremonia de nombramiento” y que las inferencias a la existencia de entidades teóricas definidas (a las que después pueden adjuntarse nombres) pueden hacerse exitosamente. Así, estas teorías no abordaban la cuestión en cuanto a cómo cualquier término puede adquirir una determinada referencia (o cualquier gesto, e. g., señalar – desde luego, la “referencia” de gestos es tan problemática como la referencia de términos, si no es que más). Sin embargo, recientemente varios autores han sugerido que se puede dar cuenta de cómo al menos algunos tipos básicos de términos refieren en términos de la noción de una “cadena causal”. En una versión (cf. Evans 1973: 187-208), una versión sorprendentemente reminiscente a las teorías de Ockham y otros lógicos del siglo XIV, se sostiene que un término refiere a “la fuente dominante” de las creencias que contienen el término. Asumiendo que podamos evitar el problema de que la causa dominante de nuestras creencias relativas a los *electrones* bien pueden ser *libros de texto*,[5] es importante notar que incluso si pudiese elaborarse una perspectiva *correcta* de este tipo, no hará nada por resolver el problema que hemos venido discutiendo.

El problema es que añadir a nuestro hipotético lenguaje formalizado de la ciencia un cuerpo de teoría titulado “teoría causal de la referencia” *es* sólo añadir más *teoría*. Pero el argumento de Skolem, y nuestras extensiones de él, no se ven afectadas por ampliar la teoría. De hecho, incluso puede tomarse la teoría para consistir en *todas las oraciones verdaderas*, y habrá muchos modelos – modelos difiriendo en la extensión de cada término no fijado por *OP* (o cualquier cosa que se tome por *OP* en un contexto dado) – que satisfacen toda la teoría. Si “refiere” puede definirse en términos de algún predicado causal o predicados causales en el metalenguaje de nuestra teoría, entonces, como cada modelo del lenguaje objeto se extiende de una manera obvia a un modelo correspondiente del metalenguaje, resultará que, *en cada modelo M,* $referencia_M$ es definible en términos de $causa_M$; pero, a menos que la palabra “causa” (o cualquiera que pueda ser el predicado o los predicados causales) ya esté pegada a una relación definida con pegamento metafísico, esto no fija en absoluto una extensión determinada para “refiere”.

Esto no es decir que la construcción de una teoría así sería inútil como filosofía o como ciencia natural. El programa de psicología cognitiva ya aludido – el programa de describir nuestros cerebros como computadoras que construyen una “representación interna del entorno” – parece requerir que las declaraciones “mentaleses” sean, al menos en algunos casos, describibles como el producto causal de dispositivos en el cerebro y en el

[5] Evans maneja este caso al decir que hay condiciones de pertinencia en el tipo de cadena causal que deben existir entre el ítem referido y el cuerpo de información del hablante.

sistema nervioso que “transducen” [“transduce”] información del entorno, y tal descripción bien podría ser lo que los teóricos causales están buscando. El programa del realismo en la filosofía de la ciencia – del realismo *empírico*, no del realismo metafísico – es mostrar que las teorías científicas pueden considerarse como representaciones cada vez mejores de un mundo objetivo con el que estamos interactuando; si tal perspectiva ha de ser parte de la propia ciencia, como los realistas empíricos afirman que debería de ser, entonces las interacciones con el mundo por medio de las cuales se forma y modifica esta representación deben ser ellas mismas parte de la materia [subject matter] de la representación. Pero el problema en cuanto a cómo *toda la representación*, incluyendo la teoría empírica del conocimiento que es una parte de ella, puede determinadamente referir no es un problema que pueda resolverse desarrollando más y mejor teoría empírica.

Teorías ideales y verdad. Una reacción al problema que he planteado sería decir: hay muchas teorías ideales en el sentido de teorías que satisfacen las restricciones operacionales, y que además tienen todas las virtudes (simplicidad, coherencia, contienen el axioma de elección, lo que sea) que a los humanos les gusta exigir. Pero no hay “hechos de la materia” no reflejados en restricciones sobre teorías ideales en este sentido. Por lo tanto, lo que es realmente verdadero es lo que es común a todas esas teorías ideales; lo que es realmente falso es lo que todas ellas niegan; todos los demás enunciados no son ni verdaderos ni falsos.

Empero, tal reacción llevaría a muy pocas verdades. Bien puede ser que hayan seres racionales – incluso especies humanas racionales – que no empleen nuestros predicados de color, o quienes no empleen el predicado “persona”, o quienes no empleen el predicado “terremoto” (cf. Wiggins 1977). No veo razón para concluir de esto que *nuestra* habla de cosas rojas, o de personas, o de terremotos, carece de valor de verdad. Si hay muchas teorías ideales (y si “ideal” es ella misma una noción un tanto de interés relativo), si hay muchas teorías que (dadas las circunstancias apropiadas) es perfectamente racional aceptar, entonces parece ser mejor decir que, en la medida en que estas teorías dicen distintas (y a veces, aparentemente incompatibles) cosas, algunos hechos son “suaves” en el sentido de depender, para su valor de verdad, del hablante, de las circunstancias de enunciación, etc. Esto es lo que debemos decir en cualquier caso sobre casos de vaguedad ordinaria, sobre habla causal ordinaria, etc. Es lo que decimos sobre enunciados de simultaneidad aparentemente incompatibles en la teoría de la relatividad especial. Conceder que hay más de una versión verdadera de la realidad no es negar que algunas versiones son falsas.

Puede ser, desde luego, que *hayan* algunas verdades que *cualquier* especie de investigadores racionales eventualmente reconocerían. (Por otro lado, el conjunto de éstas puede ser vacío, o casi vacío.) Pero decir que *por definición* éstas son todas las verdades que hay es redefinir la noción de una manera muy restrictiva. (También asume que la noción de una "teoría ideal" es perfectamente clara; una asunción que parece claramente falsa.)

Intuicionismo. Es un hecho notable que todo este problema *no* surge para el punto de vista del intuicionismo matemático. Esto no sería una sorpresa para Skolem: su conclusión fue precisamente que "la mayoría de los matemáticos quieren que las matemáticas traten, en última instancia, de operaciones computacionales ejecutables y no que consistan en proposiciones formales sobre objetos llamados esto o aquello".

En el intuicionismo, conocer el significado de una oración o de un predicado consiste en asociar la oración o el predicado con un procedimiento que permite reconocer cuándo se tiene una prueba de que la oración es constructivamente verdadera (i. e., que es posible llevar a cabo las construcciones que la oración afirma que pueden llevarse a cabo) o que el predicado aplica a una cierta entidad (i. e., que una cierta oración completa del predicado es constructivamente verdadera). La cosa más sorprendente sobre este punto de vista es que *la noción clásica de verdad no se utiliza en ninguna parte* – la semántica está completamente dada en términos de la noción de "prueba constructiva", *incluyendo la propia semántica de "prueba constructiva"*.

Desde luego, los intuicionistas no piensan que "prueba constructiva" puede formalizarse, o que "construcciones mentales" pueden identificarse con operaciones en nuestros *cerebros*. Por lo general, asumen una postura fuertemente intencionalista y *apriorística* en filosofía – esto es, asumen la existencia de entidades mentales llamadas "significados" y de una facultad especial para intuir relaciones constructivas entre estas entidades. Estos no son los aspectos del intuicionismo de los que me ocuparé. Más bien quiero ver al intuicionismo como un ejemplo de lo que Michael Dummett ha llamado "semántica no realista" – esto es, una teoría semántica que sostiene que *un lenguaje está completamente entendido cuando se domina adecuadamente un procedimiento de verificación*, y no cuando se aprenden condiciones de verdad (en el sentido clásico).

El problema con la semántica realista – semántica verdad-condicional –, como ha enfatizado Dummett, es que si sostenemos que el entendimiento de las oraciones de, digamos, la teoría conjuntos, consiste en nuestro conocimiento de sus "condiciones de verdad", entonces ¿cómo podemos decir en qué consiste a su vez *ese* conocimiento? (No puede consistir, como ya vimos, en el uso del lenguaje o "mentalés" bajo el control de restricciones operacionales más teóricas, estén fijadas o evolucionando, porque tales restricciones son demasiado débiles para proporcionar una extensión determinada para los términos, y esto es lo que quiere el realista.)

Si, no obstante, el entendimiento de las oraciones de una teoría matemática consiste en el dominio de procedimientos de verificación (que no necesitan estar fijados de una vez por todas – podemos permitir una cierta cantidad de "creatividad"), entonces una teoría matemática puede entenderse completamente, y este entendimiento no presupone la noción de un "modelo" en absoluto, ya no digamos de un "modelo pretendido".

Ni el intuicionista (o, más generalmente, el semántico "no realista") tiene que renunciar *por siempre* a la noción de un modelo. Tiene que renunciar a la referencia a modelos en su consideración de *entendimiento*; pero, una vez que ha conseguido entender un lenguaje suficientemente rico que sirva como un metalenguaje para alguna teoría *T* (que puede ser simplemente un sublenguaje del metalenguaje, de la manera familiar), puede definir 'verdadero en *T*' à la Tarski, puede hablar sobre "modelos" para *T*, etc. Incluso puede definir 'referencia' (o 'satisfacción') exactamente como lo hizo Tarski.

¿Surge otra vez toda la "paradoja de Skolem" para fastidiarlo en esta etapa? La respuesta es que no. Para ver por qué no, uno tiene que darse cuenta de qué significa la "existencia de un modelo" en las matemáticas *constructivas*.

Los "objetos" en las matemáticas constructivas están *dados mediante descripciones*. Dichas descripciones no tienen que estar misteriosamente unidas a dichos objetos por algún proceso no natural (o por pegamento metafísico). Más bien, la posibilidad de *probar* que una cierta construcción (el "sentido", por así decirlo, de la descripción del modelo) tiene ciertas propiedades constructivas es lo que se afirma y *todo* lo que se afirma al decir que el modelo "existe". En breve, *la referencia está dada mediante el sentido, y el sentido está dado mediante procedimientos de verificación y no mediante condiciones de verdad*. La "brecha" entre nuestra teoría y los "objetos" simplemente desaparece – o, mejor dicho, nunca aparece en primer lugar.

Intuicionismo liberalizado. No es mi propósito, sin embargo, intentar convertir a mi audiencia al intuicionismo. La teoría de conjuntos puede no ser el "paraíso" que Cantor pensó que era, pero tampoco es un vecindario tan malo que yo quiero abandonar por mi cuenta. ¿Podemos separar la idea filosófica detrás del intuicionismo, la idea de la semántica "no realista", de las restricciones y prohibiciones que los intuicionistas históricos quisieron imponer sobre las matemáticas?

La respuesta es que sí podemos. Primero, en cuanto a la teoría de conjuntos: la objeción a la *impredicatividad*, que es el motivo intuicionista para rechazar mucha de la teoría de conjuntos clásica, tiene poca o ninguna conexión con la insistencia en el propio verificacionismo. En realidad, las propias matemáticas intuicionistas son "impredicativas", ya que la noción intuicionista de prueba constructiva presupone pruebas constructivas que se refieren a la totalidad de *todas* las pruebas constructivas.

Segundo, en cuanto al cálculo proposicional: es bien sabido que las conectivas clásicas pueden ser reintroducidas en una teoría intuicionista por reinterpretación. Lo importante no es si uno utiliza "cálculo proposicional clásico" o no, sino cómo uno *entiende* la lógica si lo utiliza. Utilizar lógica clásica como la entendería un intuicionista significa, por ejemplo, hacer un seguimiento de cuándo una disyunción es selectiva (i. e., uno de los disjuntos es constructivamente demostrable) y cuándo es no selectiva; pero esto no parece una mala idea.

En breve, mientras que el intuicionismo puede andar con un mayor interés en las matemáticas constructivas, una versión liberalizada del punto de vista intuicionista no necesita descartar las matemáticas "clásicas" por ilegítimas o ininteligibles. ¿Qué hay del lenguaje de la ciencia empírica? Aquí hay mayores dificultades. La lógica intuicionista está dada en términos de una noción de *prueba*, y se supone que la prueba es una característica *permanente* de los enunciados. Además, la prueba es no-holística; hay tal cosa como la prueba (ya sea en el sentido clásico o el constructivo) de un enunciado matemático aislado. Pero la verificación en la ciencia empírica es una cuestión de grado, no un asunto de "sí-o-no"; incluso si lo hacemos un asunto de "sí-o-no" de una manera arbitraria, la verificación es una propiedad de las ciencias empíricas que puede *perderse*; en general, la "unidad de verificación" en la ciencia empírica es la teoría y no el enunciado aislado.

Estas dificultades muestran que pegarse [sticking] al punto de vista intuicionista, no importa qué tan liberalizado, sería una mala idea en el contexto de formalizar la ciencia empírica. Pero no son incompatibles con la semántica "no realista". La cuestión crucial es esta: ¿pensamos en el *entendimiento* del lenguaje como consistiendo en el hecho de que los hablantes poseen (colectivamente si no individualmente) una red en evolución de procedimientos de verificación, o como consistiendo en que [los hablantes] poseen un conjunto de "condiciones de verdad"? Si elegimos la primera alternativa, la alternativa de la semántica "no realista", entonces la "brecha" entre palabras y mundo, entre nuestro *uso* del lenguaje y sus "objetos", nunca aparece.[6] Además, la semántica "no realista" no es *inconsistente* con la semántica realista; es simplemente *anterior* a ella, en el sentido de que es la semántica "no realista" la que debe ser internalizada si el lenguaje ha de ser entendido.

Incluso si no es inconsistente con la semántica realista, tomar la semántica no realista como nuestra imagen de cómo se entiende el lenguaje indudablemente afectará el

[6] A la sugerencia de que identificamos la verdad con estar verificada, o aceptada, o aceptada a la larga, puede objetarse que una persona podría razonablemente, y posiblemente verdaderamente, hacer la afirmación:

> *A*; pero podría haber sido el caso de que *A* y nuestro desarrollo científico difieren de una manera tal como para hacer a $\overline{A}$ parte de la teoría ideal aceptada a la larga; en esa circunstancia, habría sido el caso de que *A* pero no era verdadero que *A*.

Este argumento es, sin embargo, falaz, porque el distinto "desarrollo científico" significa aquí la elección de una versión distinta; no podemos asumir que la *oración* $\ulcorner A \urcorner$ tiene un significado fijo independiente de qué versión aceptamos.

De hecho, el mismo problema puede confrontar a un realista metafísico. Los realistas también tienen que reconocer que hay casos en los que la referencia de un término depende de qué teoría se acepte, de modo que *A* puede ser una oración verdadera si T_1 es aceptada y una falsa si T_2 es aceptada, donde T_1 y T_2 son ambas teorías verdaderas. Pero entonces imaginemos a alguien diciendo

> *A*; pero podría haber sido el caso de que nuestra *A* y nuestro desarrollo científico difieren de un modo tal que T_2 fue aceptada. En ese caso, habría sido el caso de que *A* pero *A* no habría sido verdadera.

modo en el que vemos cuestiones acerca de la realidad y la verdad. Una razón es que la verificación en la ciencia empírica (y, en un grado menor, quizás también en las matemáticas) a veces depende de lo que antes llamamos “decisión” o “convención”. Así, en esta imagen, los hechos pueden depender de nuestros intereses, prominencias y decisiones. Habrán muchos “hechos suaves”. (Quizás si $V = L$ o no es un “hecho suave”.) No puedo lamentarme de esto. Si la apariencia y la realidad terminan siendo puntos finales en un continuo en lugar de ser las dos mitades de un monstruoso corte de Dedekind en todo lo que concebimos y no concebimos, me parece que la filosofía será más rica. La búsqueda por el “mobiliario del Universo” habrá terminado con el descubrimiento de que el Universo no es un cuarto amueblado.

¿Dónde nos equivocamos? El problema resuelto. Lo que Skolem realmente señaló es esto: ninguna teoría interesante (en el sentido de una teoría de primer orden) puede, en y de sí misma, determinar sus propios objetos hasta el isomorfismo. El argumento de Skolem puede extenderse, como vimos, para mostrar que si restricciones teóricas no determinan la referencia, entonces la adición de restricciones operacionales tampoco lo hará. Es en este punto en el que la propia referencia comienza a parecer “oculta”; que comienza a parecer que uno no puede ser ningún tipo de realista sin ser un creyente en poderes mentales no naturales. En respuesta a este predicamento se han hecho muchas movidas, tal como observamos arriba. Algunos han propuesto que las formalizaciones de *segundo orden* son la solución, al menos para las matemáticas; pero la interpretación “pretendida” del formalismo de segundo orden no está fijada por el uso del formalismo (el propio formalismo admite los llamados “modelos de Henkin”, i. e., modelos en los que las variables de segundo orden no consiguen extenderse sobre *todo* el conjunto potencia del universo de individuos), y se hace necesario atribuir a la mente poderes especiales para “asir nociones de segundo orden”. Algunos han propuesto aceptar la conclusión de que el lenguaje matemático está sólo parcialmente interpretado, e igualmente para el lenguaje que utilizamos para hablar de “entidades teóricas” en la ciencia empírica; pero entonces ¿están mejor los “objetos materiales ordinarios”? ¿Están mejor los datos sensoriales? Tanto en platonismo como el fenomenalismo han corrido desenfrenados en distintos tiempos y en distintos lugares en respuesta a este predicamento.

El problema, no obstante, yace en el propio predicamento. El predicamento sólo *es* un predicamento porque hicimos dos cosas: primero, dimos cuenta de entender el lenguaje en términos de programas y procedimientos para *utilizar* el lenguaje (¿qué otra cosa?); después, en segundo lugar, preguntamos cuáles eran los posibles "modelos" para el lenguaje, pensando en los modelos como existiendo "allá afuera" *de manera independiente de cualquier descripción*. En este punto ya había sucedido algo realmente extraño, si nos hubiésemos detenido a observar. En cualquier punto de vista, el entendimiento del lenguaje debe determinar la referencia de los términos, o, más bien, debe determinar la referencia dado el contexto de uso. Si el uso, incluso en un contexto fijo, no determina la referencia, entonces el uso no es entendimiento. El lenguaje, en la perspectiva en la que nos hablamos, tiene un programa completo de uso; pero todavía carece de una *interpretación*.

Éste es el paso fatal. Adoptar una teoría del significado de acuerdo con la cual un lenguaje cuyo uso completo está especificado todavía carece de algo – verbigracia, su "interpretación" – es aceptar un problema que sólo *puede* tener soluciones locas. Hablar como si *éste* fuera mi problema: "Sé cómo utilizar mi lenguaje, pero, ahora, ¿cómo debo singularizar una interpretación?", es hablar sin sentido. O bien el uso *ya* fija la "interpretación" o *nada* puede hacerlo.

Tampoco ayudan las "teorías causales de la referencia", etc. Básicamente, intentar salir de este predicamento con *estos* medios es esperar que el *mundo* elegirá una extensión definida para cada uno de nuestros términos incluso si *nosotros* no podemos hacerlo. Pero el mundo no elige modelos o interpreta lenguajes. *Nosotros* interpretamos nuestros lenguajes o nada lo hace.

Necesitamos, por lo tanto, un punto de vista que enlace el uso y la referencia justo del modo en el que el punto de vista realista metafísico se rehúsa a hacerlo. El punto de vista de la "semántica no realista" es precisamente ese punto de vista. Desde ese punto de vista, es trivial decir que un modelo en el que, como podría ser, el conjunto de gatos y el conjunto de perros están permutados (i. e., 'gato' está asignado al conjunto de perros como su extensión, y 'perro' está asignado al conjunto de gatos) es "no pretendido" incluso si los correspondientes ajustes en las extensiones de todos los otros predicados hacen que termine siendo que las restricciones operacionales y teóricas de la ciencia total o de la creencia total estén todas “preservadas”. Tal modelo sería no pretendido *porque nosotros no pretendemos que la palabra ‘gato’ se refiera a perros*. Desde el punto de vista realista metafísico, esta respuesta no funciona; solamente empuja hacia atrás la cuestión al metalenguaje. El axioma del metalenguaje: “‘gato’ refiere a gatos” no puede descartar tal interpretación no pretendida del lenguaje objeto, a menos que el propio metalenguaje ya haya tenido singularizada *su* interpretación pretendida; pero estamos en el mismo predicamento con respecto al metalenguaje que en el que estamos con respecto al lenguaje objeto, desde ese punto de vista, de manera que todo es en vano. Sin embargo, desde el punto de vista de la semántica “no realista”, el metalenguaje está completamente entendido, y también lo está el lenguaje objeto. De modo que podemos *decir y entender* “‘gato’ refiere a gatos”. Aunque el modelo referido satisface la teoría, etc., es “no pretendido”; reconocemos que no es pretendido *desde la descripción mediante la cual está dado* (como en el caso intuicionista). Los modelos no son huérfanos nouménicos perdidos buscando que alguien los nombre; son construcciones dentro de nuestra propia teoría, y tienen nombres desde el nacimiento.