¿Por qué la proposición $7 + 5 = 12$ no puede ser sintética en el sentido de Russell?

Por

Emilio Méndez Pinto

La cuestión de si una proposición como “7 + 5 = 12” es o no es sintética puede estar sujeta a si “12” es o no es un concepto contenido en los conceptos de “7”, “5”, “+”. La proposición “7 + 5 = 12” es el ejemplo que utilizó Kant en la *Crítica de la razón pura* para dar cuenta del carácter sintético que tienen las proposiciones aritméticas. A este respecto, Kant escribió:

> Podría pensarse al principio que la proposición: 7 + 5 = 12, es una proposición meramente analítica, que se sigue del concepto de una suma de siete y de cinco, según el principio de contradicción. Pero, cuando se considera más de cerca, se encuentra que el concepto de la suma de 7 y 5 no encierra nada más que la reunión de ambos números en uno solo, con lo cual no se piensa de ningún modo cuál sea ese número único que comprende los otros dos. El concepto de doce no es, en modo alguno, pensado ya en el pensamiento de aquella reunión de siete y cinco, y por mucho que analice mi concepto de una suma semejante posible, no encontraré en él el número doce. Hay que salir de esos conceptos, ayudándose con la intuición que corresponde a uno de ellos, por ejemplo, los cinco dedos o bien (como *Segner* en su aritmética) cinco puntos, y así poco a poco añadir las unidades del cinco, dado en la intuición, al concepto del siete. Pues tomo primero el número 7 y, ayudándome como intuición de los dedos de mi mano para el concepto del 5, añado las unidades, que antes había recogido para constituir el número 5, poco a poco al número 7, siguiendo mi imagen, y así veo seguir el número 12. Que 5 ha de añadirse a 7, es cierto que lo he pensado en el concepto de una suma = 7 + 5; pero no que esa suma sea igual al número 12. La proposición aritmética es, por tanto, siempre sintética y de esto se convence uno con tanta mayor claridad cuanto mayores son los números que se toman, pues entonces se advierte claramente que por muchas vueltas que le demos a nuestros conceptos, no podemos nunca encontrar la suma por medio del mero análisis de nuestros conceptos y sin ayuda de la intuición.[1]

Sobre lo anterior pueden decirse varias cosas:

(1) Que el concepto de doce *sí* se encuentra “pensado ya en el pensamiento” de la “reunión” de siete y cinco, porque ¿en qué otra cosa se podría pensar? ¿En un número $\neq 12$? ¿En algo que ni siquiera es un número?

(2) Que, si uno piensa en los números como conjuntos de conjuntos (más allá de que, siguiendo a Benacerraf,[2] *no podrían ser* conjuntos de conjuntos), si, por ejemplo, uno piensa en los números como conjuntos de conjuntos por mera economía de los

[1] Kant, Immanuel, *Crítica de la razón pura*, Ed. Porrúa, México, 2008, p. 36.
[2] Véase Benacerraf, Paul, *What numbers could not be*, Philosophical Review 74 (1965), pp. 47-73.

procesos del pensamiento, entonces la descripción que ofrece Kant para llegar al número 12 a partir de contar los dedos de las manos resulta poco convincente.

(3) Que contar los cinco dedos de una de mis manos difícilmente se explica en términos de una intuición sensible a priori relativa al tiempo; que, en cualquier caso, se explica mejor en términos de contar transitivamente (como cuando, volviendo a Benacerraf, uno cuenta canicas en un tazón).[3]

(4) Etcétera.

Sea como fuere, en este trabajo no nos interesan estas discusiones. En cambio, nos interesa señalar que la cuestión de si una proposición como "7 + 5 = 12" es o no es sintética puede estar sujeta al siguiente criterio (que es el criterio de Russell): si de un teorema *A* se deduce un teorema *B*, *A* será una proposición *analítica* en la medida en la que *B* repita *A* en otros términos y en la medida en la que la verdad de *A* resulte de los significados de las palabras utilizadas al establecerlo.[4]

En aras de nuestro argumento, convengamos en que "7 + 5 = 12" es un teorema (es decir, es una verdad que se hace evidente por medio de un tren de razonamiento llamado *demostración*).[5] Ahora bien (y esto lo omite Russell), si $B, C, ..., N, N+1, ...$ son las deducciones de *A*, para que *A* sea una proposición analítica no sólo ha de suceder que $A = B,\ A = C, ...,\ A = N,\ A = N+1, ...$ (es decir, que $"B, C, ..., N, N+1, ..."$ *repitan A en otros términos*), sino también que $B = C = ... = N = N+1 = ...$. Esta omisión produce que, por ejemplo, la proposición $"a+(b+c)=(a+b)+c"$ *no sea analítica en el sentido de Russell*: en efecto, si $"a+(b+c)=(a+b)+c"$ es un teorema A y $B = a+(b+1)=(a+b)+1,$ $C = a+(b+2)=(a+b)+2$ son dos de sus teoremas deducidos, $B \neq C,$ y por tanto es imposible que $A = B,\ A = C.$

Ahora bien, para el caso de nuestro teorema "7 + 5 = 12" no sucede que, si $A = 7+5 = 12,$ sus respectivas deducciones $B, C, ..., N, N+1, ...$ sean distintas entre sí (más allá o independientemente de que *B*, *C*, etc., repitan *A* en otros términos). Por ello,

[3] Ibídem.
[4] Russell, Bertrand, *¿Es la matemática puramente lingüística?*, en Russell, Bertrand, *Análisis filosófico*, Ed. Paidós, España, 1999, pp. 124-125.
[5] Esta definición de "teorema" es de Legendre. Véase Legendre, A. M., *Elements of Geometry and Trigonometry*, Harper and Brothers, Nueva York, 1834, p. 12.

$"7+5=12"$ no puede ser una proposición sintética en el sentido de Russell. (La *demostración* de $"7+5=12"$ como una proposición analítica en el sentido de $A=B,\ A=C,...,\ A=N,\ A=N+1,...$ y en el sentido de $B=C=...=N=N+1=...$ escapa a nuestros propósitos. Sin embargo, tal omisión no afecta a nuestro argumento.)