¿Qué es el problema del continuo de Cantor?

Por

Kurt Gödel

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: What is Cantor's continuum problem?

Publicado originalmente en *The American Mathematical Monthly*, vol. 54, n. 9, 515-525, 1947. *The Mathematical Association of America* otorgó a la colección *La Reina de las Ciencias* los permisos de traducción y publicación.

1. El concepto de número cardinal

El problema del continuo de Cantor es simplemente la pregunta: ¿Cuántos puntos hay en una línea recta en espacio euclidiano? Una pregunta equivalente es: ¿Cuántos conjuntos distintos de enteros existen?

Esta pregunta, desde luego, pudo surgir sólo después de que el concepto de "número" se había extendido a conjuntos infinitos; por tanto, podría dudarse si esta extensión puede llevarse a cabo de una manera únicamente determinada y si, por consiguiente, está justificada la declaración del problema en los términos simples utilizados arriba. Sin embargo, un examen más cercano muestra que la definición de Cantor de números infinitos realmente tiene este carácter de univocidad. Pues cualquier cosa que "número" como aplicado a conjuntos infinitos pueda significar, ciertamente queremos que tenga la propiedad de que el número de objetos perteneciendo a alguna clase no cambie si, dejando los objetos iguales, uno cambia de cualquier modo sus propiedades o relaciones mutuas (por ejemplo, sus colores o su distribución en el espacio). De esto, no obstante, inmediatamente se sigue que dos conjuntos (al menos dos conjuntos de objetos cambiables del mundo espacio-tiempo) tendrán el mismo número cardinal si sus elementos pueden llevarse a una correspondencia uno-a-uno, que es la definición de Cantor de igualdad entre números. Pues si existe tal correspondencia para dos conjuntos A y B, es posible (al menos teóricamente) cambiar las propiedades y relaciones de cada elemento de A en aquellas del correspondiente elemento de B, por lo que A es transformado en un conjunto completamente indistinguible de B, y por tanto del mismo número cardinal. Por ejemplo, asumiendo un cuadrado y un segmento de línea ambos completamente llenados con puntos de masa (de modo que en cada punto de ellos está situado exactamente un punto de masa), se sigue, debido al hecho demostrable de que existe una correspondencia uno-a-uno entre los puntos de un cuadrado y de un segmento de línea y, por lo tanto, también entre los correspondientes puntos de masa, que los puntos de masa del cuadrado pueden reorganizarse de modo tal como para llenar exactamente al segmento de línea, y viceversa. Tales consideraciones, es verdad, aplican directamente sólo a objetos físicos, pero una definición del concepto de "número" que dependiera del tipo de objetos que son numerados difícilmente podría considerarse como satisfactoria.

Así, apenas queda otra opción que aceptar la definición de Cantor de igualdad entre números, que fácilmente puede extenderse a una definición de “mayor” y “menor” para números infinitos al estipular que el número cardinal *M* de un conjunto *A* ha de ser llamado menor que el número cardinal *N* de un conjunto *B* si *M* es distinto de *N* pero igual al número cardinal de algún subconjunto de *B*. Que un número cardinal teniendo una cierta propiedad existe está definido para significar que existe un conjunto de tal número cardinal. Sobre la base de estas definiciones se hace posible probar que existen infinitos números cardinales infinitos distintos o “potencias”, y que, en particular, el número de subconjuntos de un conjunto siempre es mayor que el número de sus elementos; además, se hace posible extender (de nuevo, sin ninguna arbitrariedad) las operaciones aritméticas a números infinitos (incluyendo sumas y productos con cualquier número infinito de términos o factores) y probar prácticamente todas las reglas de computación ordinarias.

Pero, incluso después de eso, el problema de identificar al número cardinal de un conjunto individual, como el continuo lineal, no estaría bien definido si no existiera alguna representación sistemática de los números cardinales infinitos, comparable a la notación decimal de los enteros. Tal representación sistemática, no obstante, sí existe, debido al teorema de que para cada número cardinal y cada conjunto de números cardinales[1] existe exactamente un número cardinal inmediatamente sucesivo en magnitud y que el número cardinal de cada conjunto ocurre en la serie así obtenida.[2] Este teorema hace posible denotar al número cardinal inmediatamente posterior al conjunto de números finitos con $\aleph_0$ (que es la potencia de los conjuntos “numerablemente infinitos”), al siguiente con $\aleph_1$, etc.; al inmediatamente posterior a todos los $\aleph_i$, donde *i* es un entero, con $\aleph_\omega$, al siguiente con $\aleph_{\omega+1}$, etc. La teoría de los números ordinales proporciona los medios para extender esta serie más y más.

---

[1] En cuanto a la cuestión de por qué no existe un conjunto de todos los números cardinales, véase la nota 12.

[2] Es necesario el axioma de elección para la prueba de este teorema (véase Fraenkel y Bar-Hillel 1958). Pero puede decirse que este axioma, desde casi cada punto de vista posible, está hoy en día tan bien fundado como los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Ha sido probado consistente con los otros axiomas de la teoría de conjuntos que suelen asumirse, siempre que estos otros axiomas sean consistentes (véase Gödel 1940). Además, es posible definir, en términos de cualquier sistema de objetos satisfaciendo los otros axiomas, un sistema de objetos satisfaciendo tales axiomas *y* el axioma de elección. Por último, el axioma de elección es justo tan evidente como los otros axiomas de la teoría de conjuntos para el concepto “puro” de conjunto explicado en la nota 11.

2. El problema del continuo, la hipótesis del continuo, y los resultados parciales relativos a su verdad obtenidos hasta ahora

De modo que el análisis de la frase "cuántos" conduce sin ambigüedad a un significado definido para la pregunta escrita en la segunda línea de este artículo: El problema es descubrir cuál de los $\aleph$ s es el número de puntos de una línea recta o (lo que es lo mismo) de cualquier otro continuo (de cualquier número de dimensiones) en un espacio euclidiano. Cantor, después de haber probado que este número es mayor que $\aleph_0$, conjeturó que es $\aleph_1$. Una proposición equivalente es esta: Cualquier subconjunto infinito del continuo tiene la potencia o bien del conjunto de enteros o bien de todo el continuo. Esta es la hipótesis del continuo de Cantor.

Pero, aunque ahora la teoría de conjuntos de Cantor ha tenido un desarrollo de más de setenta años y el problema es evidentemente de gran importancia para ella, hasta ahora nada se ha probado acerca de la cuestión de cuál es la potencia del continuo o si sus subconjuntos satisfacen la condición recién establecida, excepto (1) que la potencia del continuo no es un número cardinal de un cierto tipo especial, a saber, no es un límite de números cardinales menores numerables,[3] y (2) que la proposición recién mencionada acerca de los subconjuntos del continuo es verdadera para una cierta fracción infinitesimal de estos subconjuntos, los conjuntos analíticos.[4] [5] Ni siquiera puede asignarse un límite superior, sin importar qué tan grande sea, para la potencia del continuo. Ni la cualidad del número cardinal del continuo se conoce mejor que su cantidad. No está decidido si este número es regular o singular, accesible o inaccesible, y (excepto por el resultado negativo de König) cuál es su carácter de confinalidad (véase la nota 4). La única cosa que se sabe, además de los resultados recién mencionados, es un gran número de consecuencias de, y algunas proposiciones equivalentes a, la conjetura de Cantor (Sierpiński 1934a).

---

[3] Véase Hausdorff, *Mengenlehre* 1914: 68, o Bachmann 1955: 167. El descubridor de este teorema, J. König, afirmó más de lo que realmente probó (1905: 177).
[4] Véase la lista de definiciones más adelante.
[5] Véase Hausdorff 1914, 3ª ed.: 32. Incluso para complementos de conjuntos analíticos la cuestión sigue siendo indecisa, y sólo puede probarse que o bien tienen la potencia $\aleph_0$ o $\aleph_1$ o [la del] continuo o que son finitos (véase Kuratowski 1933-50, 1: 246).

Esta pronunciada falla se vuelve todavía más chocante si el problema es considerado en su conexión con cuestiones generales de la aritmética cardinal. Es fácilmente demostrable que la potencia del continuo es igual a $2^{\aleph_0}$. Así que el problema del continuo resulta ser una cuestión desde la "tabla de multiplicación" de números cardinales, a saber, el problema de evaluar un cierto producto infinito (de hecho, el [producto] no trivial más simple que pueda formarse). No hay, sin embargo, ningún producto infinito (de factores >1) para el que pueda asignarse tanto como un límite superior por su valor. Todo lo que se sabe sobre la evaluación de productos infinitos son dos límites inferiores debidos a Cantor y a König (el último de los cuales implica al ya mencionado teorema negativo sobre la potencia del continuo), y algunos teoremas relativos a la reducción de productos con distintos factores a exponenciaciones y de exponenciaciones a exponenciaciones con menores bases o exponentes. Estos teoremas reducen[6] todo el problema de computar productos infinitos a la evaluación de $\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$ y al desempeño de ciertas operaciones fundamentales sobre números ordinales, tales como determinar el límite de una serie de ellos. Todos los productos y potencias pueden fácilmente computarse[7] si se asume la "hipótesis generalizada del continuo"; i. e., si se asume que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para cada α, o, en otros términos, que el número de subconjuntos de un conjunto de potencia $\aleph_\alpha$ es $\aleph_{\alpha+1}$. Pero, sin hacer ninguna asunción no demostrada, ni siquiera se sabe si o no $m<n$ implica $2^m < 2^n$ (aunque es trivial que implica $2^m \leq 2^n$), ni tampoco siquiera si $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

3. Replanteamiento del problema sobre la base de un análisis de los fundamentos de la teoría de conjuntos y de resultados obtenidos a este respecto

Esta escasez de resultados, incluso en cuanto a las cuestiones más fundamentales en este campo, puede deberse hasta cierto grado a dificultades puramente matemáticas; sin embargo, parece (véase la sección 4) que también están involucradas razones más profundas y que una solución completa de estos problemas puede obtenerse sólo mediante un análisis más profundo (del que las matemáticas acostumbran ofrecer) de los significados

---

[6] Esta reducción puede efectuarse, debido a los resultados y métodos de un artículo de Tarski (1925: 1).

[7] Para números regulares $\aleph_\alpha$ se obtiene inmediatamente:

$$\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

de los términos que tienen lugar en ellos (como “conjunto”, “correspondencia uno-a-uno”, etc.) y de los axiomas que subyacen en su uso. Ya se han propuesto varios análisis así. Veamos entonces qué ofrecen a nuestro problema.

Antes que nada está el intuicionismo de Brouwer, que es totalmente destructivo en sus resultados. Toda la teoría de los $\aleph$s mayores que $\aleph_1$ es rechazada como sin sentido (Brouwer 1909: 569). La propia conjetura de Cantor recibe varios significados distintos, todos de los cuales, aunque muy interesantes en sí mismos, son muy distintos al problema original. Conducen parcialmente a respuestas afirmativas, parcialmente a respuestas negativas (Brouwer 1907, I: 9; III: 2). Sin embargo, no todo en este campo ha sido suficientemente clarificado. El punto de vista “semi-intuicionista” en el sentido de H. Poincaré y H. Weyl[8] difícilmente preservaría sustancialmente más de la teoría de conjuntos.

Sin embargo, esta actitud negativa hacia la teoría de conjuntos de Cantor, y hacia las matemáticas clásicas, de las que es una generalización natural, no es de ningún modo una consecuencia necesaria de un examen detallado sobre sus fundamentos, sino sólo el resultado de una cierta concepción filosófica sobre la naturaleza de las matemáticas, que admite objetos matemáticos sólo en la medida en que sean interpretables como nuestras propias construcciones o, al menos, puedan estar completamente dados en la intuición matemática. Para alguien que considere que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de nuestro tener una intuición de ellos de manera individual, y quien solamente requiere que los conceptos matemáticos generales deben sernos suficientemente claros para poder reconocer su firmeza y la verdad de los axiomas relativos a ellos, existe, creo, un fundamento satisfactorio de la teoría de conjuntos de Cantor en toda su extensión y significado originales, a saber, la axiomática de la teoría de conjuntos interpretada en la forma esbozada más abajo.

Al principio podría parecer que las paradojas de la teoría de conjuntos condenarían al fracaso a una empresa así, pero un examen más detallado muestra que no causan ningún

[8] Véase Weyl 1918 (ed. 1932). Si el procedimiento de construcción de conjuntos ahí descrito (p. 20) es iterado un número (transfinito) de veces suficientemente grande, uno obtiene exactamente los números reales del modelo para la teoría de conjuntos mencionado en la sección 4, en donde la hipótesis del continuo es verdadera. Pero esta iteración no es posible dentro de los límites del punto de vista semi-intuicionista.

problema en absoluto. Son un problema muy serio, pero no para las matemáticas, sino para la lógica y la epistemología. En tanto los conjuntos ocurren en las matemáticas (al menos en las matemáticas de hoy en día, incluyendo toda la teoría de conjuntos de Cantor), son conjuntos de enteros, o de números racionales (i. e., de pares de enteros), o de números reales (i. e., de conjuntos de números racionales), o de funciones de números reales (i. e., de conjuntos de pares de números reales), etc. Cuando se afirman teoremas acerca de todos los conjuntos (o la existencia de conjuntos en general), siempre pueden interpretarse sin ninguna dificultad para significar que valen para conjuntos de enteros así como para conjuntos de conjuntos de enteros, etc. (respectivamente, que o bien existen conjuntos de enteros, o conjuntos de conjuntos de enteros, o…, etc., que tienen la propiedad afirmada). Este concepto de conjunto,[9] no obstante, de acuerdo con el cual un conjunto es algo obtenible desde los enteros (o algunos otros objetos bien definidos) por aplicación iterada[10] de la operación "conjunto de",[11] no algo obtenido al dividir la totalidad de todas las cosas existentes en dos categorías, nunca ha llevado a ninguna antinomia; esto es, el trabajo perfectamente "ingenuo" y acrítico con este concepto de conjunto ha demostrado hasta ahora ser completamente auto-consistente.[12]

Pero, además, los axiomas que subyacen al uso irrestricto de este concepto de conjunto o, al menos, un subconjunto de ellos que sea suficiente para todas las pruebas matemáticas ideadas hasta ahora (excepto para teoremas sobre la existencia de números cardinales extremadamente grandes, véase la nota 16), han sido formulados de una manera

---

[9] Debe admitirse que el espíritu de las modernas disciplinas abstractas de las matemáticas, en particular de la teoría de las categorías, trasciende este concepto de conjunto, como se vuelve evidente, por ejemplo, por la auto-aplicabilidad de categorías (véase MacLane 1961). Sin embargo, no parece que se pierde nada del contenido matemático de la teoría si se distinguen categorías de distintos niveles. Si existiesen pruebas matemáticamente interesantes que no pasaran bajo esta interpretación, entonces las paradojas de la teoría de conjuntos se volverían un serio problema para las matemáticas.

[10] Esta frase pretende incluir iteración transfinita; i. e., la totalidad de conjuntos obtenida por iteración finita es considerada ella misma un conjunto y una base para aplicaciones posteriores de la operación "conjunto de".

[11] La operación "conjunto de *x*s" (donde la variable "*x*" se extiende sobre algún tipo dado de objetos) no puede definirse satisfactoriamente (al menos no en el estado actual de conocimiento), sino que sólo puede ser parafraseada con otras expresiones que involucren de nuevo al concepto de conjunto, como: "multitud" ("combinación", "parte") es concebida como algo que existe en sí mismo sin importar si podemos definirlo con un número finito de palabras (de modo que no están excluidos conjuntos aleatorios).

[12] Inmediatamente se sigue de esta explicación del término "conjunto" que un conjunto de todos los conjuntos, u otros conjuntos de una extensión similar, no puede existir, ya que cada conjunto obtenido de este modo inmediatamente da lugar a aplicaciones posteriores de la operación "conjunto de" y, por tanto, a la existencia de conjuntos más grandes.

tan precisa en la teoría axiomática de conjuntos[13] que la cuestión de si de ellos se sigue alguna proposición dada puede transformarse, por medio de la lógica matemática, en un problema puramente combinatorio concerniente a la manipulación de símbolos que incluso el intuicionista más radical debe reconocer como significativos. Así que el problema del continuo de Cantor, sin importar qué punto de vista filosófico se adopte, innegablemente retiene al menos este significado: descubrir si una respuesta, y si es así qué respuesta, puede derivarse de los axiomas de la teoría de conjuntos tal como están formulados en los sistemas citados.

Desde luego, si es interpretada de esta manera, hay (asumiendo la consistencia de los axiomas) *a priori* tres posibilidades para la conjetura de Cantor: puede ser demostrable, refutable, o indecidible.[14] La tercera alternativa (que es solamente una formulación precisa de la conjetura precedente, que las dificultades del problema son probablemente no puramente matemáticas) es la más probable. Buscar una prueba para ella es, actualmente, quizás el modo más prometedor de atacar el problema. Ya se ha obtenido un resultado en este sentido, a saber, que la conjetura de Cantor no es refutable desde los axiomas de la teoría de conjuntos, siempre que estos axiomas sean consistentes (véase la sección 4).

Debe notarse, empero, que sobre la base del punto de vista aquí adoptado, una prueba de la indecidibilidad de la conjetura de Cantor desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos (en contraposición, p. ej., a la prueba de la trascendencia de π) de ningún modo resolvería el problema. Pues si los significados de los términos primitivos de la teoría de conjuntos tal como fueron explicados en páginas anteriores y en la nota 11 son aceptados como firmes, se sigue que los conceptos y los teoremas de la teoría de conjuntos describen alguna realidad bien determinada, en la que la conjetura de Cantor debe ser o verdadera o falsa. Por lo tanto, su indecidibilidad a partir de los axiomas asumidos hoy en día sólo puede significar que estos axiomas no contienen una descripción completa de esa realidad. Tal creencia no es de ninguna manera quimérica, porque es posible señalar modos

[13] Véase, p. ej., Bernays, 1937-54, 2: 65; 6: 1; 7: 65, 133; 8: 89. Von Neumann 1925: 219; cf. también von Neumann 1929: 227; y 1928: 669; Gödel 1940; Bernays 1958. Al incluir axiomas del infinito muy fuertes, recientemente han sido posibles axiomatizaciones mucho más elegantes. (Véase Bernays 1961.)

[14] En caso de que los axiomas fuesen inconsistentes, ocurriría la última de las cuatro posibles alternativas *a priori* para la conjetura de Cantor, a saber, sería entonces tanto demostrable como refutable por los axiomas de la teoría de conjuntos.

en los que la decisión de una cuestión, que es indecidible desde los axiomas habituales, podría no obstante obtenerse.

En primer lugar, los axiomas de la teoría de conjuntos de ningún modo forman un sistema cerrado en sí mismo, sino que, por el contrario, el propio concepto de conjunto[15] sobre el que están basados sugiere su extensión por nuevos axiomas que afirman la existencia de iteraciones todavía posteriores de la operación "conjunto de". Estos axiomas también pueden formularse como proposiciones afirmando la existencia de números cardinales muy grandes (i. e., de conjuntos teniendo estos números cardinales). El más simple de estos "axiomas del infinito" fuertes afirma la existencia de números inaccesibles (en el sentido más débil o más fuerte) > $\aleph_0$. El último axioma, más o menos, no significa nada más que esto: la totalidad de conjuntos obtenibles mediante el uso de los procedimientos de formación de conjuntos expresados en los otros axiomas forma de nuevo un conjunto (y, por tanto, una nueva base para aplicaciones posteriores de estos procedimientos) (Zermelo 1930: 29). Otros axiomas del infinito han sido formulados primero por P. Mahlo.[16] Estos axiomas muestra claramente no sólo que el sistema axiomático de la teoría de conjuntos tal como hoy se utiliza es incompleto, sino también que puede ser complementado, sin arbitrariedad, con nuevos axiomas que sólo despliegan el contenido del concepto de conjunto explicado arriba.

Puede probarse que estos axiomas también tienen consecuencias fuera del dominio de números transfinitos muy grandes, que es su asunto inmediato: cada uno de ellos, bajo la

---

[15] Similarmente el concepto "propiedad de conjunto" (el segundo de los términos primitivos de la teoría de conjuntos) sugiere extensiones continuadas de los axiomas que se refieren a él. Además, pueden introducirse conceptos de "propiedad de propiedad de conjunto", etc. Sin embargo, los nuevos axiomas así obtenidos, en cuanto a sus consecuencias para proposiciones referidas a dominios limitados de conjuntos (como la hipótesis del continuo), están contenidos (hasta donde se conocen hoy en día) en los axiomas sobre conjuntos.

[16] Véase Mahlo 1911: 190-200; 1913: 269-76. Desde la presentación del tema por parte de Mahlo, no obstante, no parece que los números que él define realmente existan. En años recientes se ha hecho un progreso considerable en cuanto a los axiomas del infinito. En particular, se han formulado algunos que están basados en principios completamente distintos de los de Mahlo, y Dana Scott ha probado que uno de ellos implica la negación de la proposición A (mencionada más adelante). Así que la prueba de consistencia para la hipótesis del continuo explicada más adelante *no* pasa si se añade este axioma. Sin embargo, todavía no se ha aclarado que estos axiomas estén implicados por el concepto general de conjunto en el mismo sentido que en el de Mahlo. Véase Tarski 1962: 134; Scott 1961; Hanf y Scott 1961: 445. Los axiomas de Mahlo han sido derivados por Azriel Lévy desde un principio general sobre el sistema de todos los conjuntos (1960: 233). Véase también Bernays 1961: 1, donde casi todos los axiomas de la teoría de conjuntos están derivados del principio de Lévy.

asunción de su consistencia, puede mostrarse que incrementa el número de proposiciones decidibles incluso en el campo de las ecuaciones diofánticas. En cuanto al problema del continuo, hay poca esperanza de resolverlo por medio de aquellos axiomas del infinito que pueden establecerse sobre la base de los principios de Mahlo (la ya mencionada prueba para la irrefutabilidad de la hipótesis del continuo pasa por todos ellos sin ningún cambio). Pero existen otros basados en distintos principios (véase la nota 16); también pueden existir, además de los axiomas habituales, los axiomas del infinito, y los axiomas mencionados en la nota 15, otros axiomas (hasta ahora desconocidos) de la teoría de conjuntos que un entendimiento más profundo de los conceptos subyacentes a la lógica y a las matemáticas nos permitiría reconocer como implicados por estos conceptos (véase, p. ej., la nota 19).

En segundo lugar, no obstante, incluso descartando la necesidad intrínseca de algún nuevo axioma, e incluso en el caso de que no tenga ninguna necesidad intrínseca en absoluto, una probable decisión acerca de su verdad también es posible de otra manera, a saber, inductivamente al estudiar su "éxito". Éxito significa aquí fecundidad en consecuencias, particularmente en consecuencias "verificables", i. e., consecuencias demostrables sin el nuevo axioma, cuyas pruebas, no obstante, con la ayuda del nuevo axioma, son considerablemente más simples y más fáciles de descubrir, y hacen posible contraer en una prueba muchas pruebas distintas. Los axiomas para el sistema de números reales, rechazados por los intuicionistas, han sido verificados hasta cierto grado en este sentido, debido al hecho de que la teoría analítica de números con frecuencia permite a uno probar teoremas de la teoría de números que, de un modo más incómodo, pueden verificarse subsecuentemente mediante métodos elementales. Pero es concebible un grado de verificación mucho mayor que ese. Podrían existir axiomas tan abundantes en sus consecuencias verificables, arrojando tanta luz sobre todo un campo, y produciendo métodos tan poderosos para resolver problemas (e incluso resolviéndolos constructivamente, en la medida de lo posible) que, sin importar si son o no intrínsecamente necesarios, tendrían que ser aceptados al menos en el mismo sentido que cualquier teoría física bien establecida.

4. Algunas observaciones sobre la pregunta: ¿En qué sentido y en qué dirección puede esperarse una solución del problema del continuo?

Pero, ¿dichas consideraciones son apropiadas para el problema del continuo? ¿Hay realmente cualesquiera indicaciones claras para su insolubilidad a partir de los axiomas aceptados? Creo que hay al menos dos:

La primera resulta del hecho de que hay dos clases de objetos muy distintamente definidas, ambas de las cuales satisfacen todos los axiomas de la teoría de conjuntos que han sido establecidos hasta ahora. Una clase consiste en los conjuntos definibles de una cierta manera mediante propiedades de sus elementos;[17] la otra en los conjuntos en el sentido de multitudes arbitrarias, independientemente de si, o cómo, pueden ser definidos. Ahora bien, antes de haberse establecido qué objetos han de numerarse, y sobre la base de cuáles correspondencias uno-a-uno, uno difícilmente puede esperar ser capaz de determinar su número, excepto quizás en el caso de alguna afortunada coincidencia. Si, no obstante, alguien cree que es insignificativo hablar de conjuntos excepto en el sentido de extensiones de propiedades definibles, entonces, también, difícilmente puede esperar más que una pequeña fracción de los problemas de la teoría de conjuntos sea soluble sin hacer uso de esta, en su opinión esencial, característica de los conjuntos, a saber, que son extensiones de propiedades definibles. Esta característica de los conjuntos, sin embargo, no está ni formulada explícitamente ni contenida implícitamente en los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos. Así que desde cualquier punto de vista, si además uno toma en cuenta lo que se dijo en la sección 2, puede conjeturarse que el problema del continuo no puede resolverse sobre la base de los axiomas establecidos hasta ahora, pero, por otro lado, puede ser soluble con la ayuda de algún nuevo axioma que establecería o implicaría algo acerca de la definibilidad de los conjuntos.[18]

---

[17] A saber, definibles mediante ciertos procedimientos, "*en términos* de números ordinales" (i. e., aproximadamente, bajo la asunción de que para cada número ordinal está dado un símbolo que lo denota). Véase Gödel 1940 y 1939. Desde luego, la paradoja de Richard no aplica a este tipo de definibilidad, porque la totalidad de ordinales es ciertamente no numerable.

[18] El programa de D. Hilbert para una solución del problema del continuo (véase Hilbert 1926: 161), que, no obstante, nunca ha sido llevado a cabo, también estaba basado en una consideración de todas las definiciones posibles de los números reales.

La segunda mitad de esta conjetura ya ha sido verificada; a saber, el concepto de definibilidad mencionado en la nota 17 (que es él mismo definible en la teoría axiomática de conjuntos) hace posible derivar, en la teoría axiomática de conjuntos, la hipótesis generalizada del continuo desde el axioma de que cada conjunto es definible en este sentido.[19] Ya que este axioma (llamémoslo "A") resulta ser demostrablemente consistente con los otros axiomas, bajo la asunción de la consistencia de estos otros axiomas, este resultado (independientemente de la posición filosófica tomada hacia la definibilidad) muestra la consistencia de la hipótesis del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos, siempre que estos axiomas sean ellos mismos consistentes.[20] La prueba, en su estructura, es similar a la prueba de consistencia de la geometría no euclidiana por medio de un modelo dentro de la geometría euclidiana. A saber, de los axiomas de la teoría de conjuntos se sigue que los conjuntos definibles en el sentido ya mencionado forman un modelo de teoría de conjuntos en el que la proposición A, y por tanto la hipótesis generalizada del continuo, es verdadera.

Un segundo argumento a favor de la irresolubilidad del problema del continuo sobre la base de los axiomas habituales puede basarse en ciertos hechos (desconocidos en la época de Cantor) que parecen indicar que la conjetura de Cantor resultará estar equivocada,[21] mientras que, por otro lado, una refutación de ella es demostrablemente imposible sobre la base de los axiomas que se asumen hoy en día.

Uno de tales hechos es la existencia de ciertas propiedades de conjuntos de puntos (afirmando una rareza extrema de los conjuntos en cuestión) para los que se ha tenido éxito en probar la existencia de conjuntos no numerables teniendo estas propiedades, pero no es

---

[19] Por otro lado, desde un axioma en algún sentido opuesto a éste, quizás podría derivarse la negación de la conjetura de Cantor. Estoy pensando en un axioma que (similar al axioma de completitud de Hilbert en la geometría) establecería alguna propiedad máxima del sistema de todos los conjuntos, mientras el axioma A establece una propiedad mínima. Nótese que sólo una propiedad máxima parecería armonizar con el concepto de conjunto explicado en la nota 11.

[20] Véase Gödel 1940 y 1939: 220. Aprovecho esta oportunidad para corregir un error en la notación y una errata que ocurrieron en este artículo: en las líneas 25-29, p. 221; 4-6 y 10, p. 222; 11-19, p. 223, la letra α debe reemplazarse (en todos los lugares en los que ocurre) por μ. También, en el Teorema 6, p. 222, debe insertarse el símbolo "$\equiv$" entre $\phi_\alpha(x)$ y $\phi_{\bar{\alpha}}(x')$. Para un llevar a cabo de la prueba con todo detalle, ha de consultarse Gödel 1940.

[21] Perspectivas hacia esta dirección también han sido expresadas por Lusin 1935: 129ss. Véase también Sierpiński 1934a: 132.

evidente ninguna manera en la que uno podría esperar probar la existencia de ejemplos de la potencia del continuo. Propiedades de este tipo (de subconjuntos de una línea recta) son: (1) ser de la primera categoría en cada conjunto perfecto (Sierpiński 1934b: 270, y Kuratowski 1933-50, 1: 269ss), (2) ser llevado a un conjunto-cero por cada mapeo uno-a-uno continuo de la línea sobre sí misma (Lusin y Sierpiński 1918: 35, y Sierpiński 1934b: 270). Otra propiedad de naturaleza similar es la de ser cubrible por infinitos intervalos de cualesquiera longitudes dadas. Pero en este caso ni siquiera se ha conseguido probar la existencia de ejemplos no numerables. Sea como sea, de la hipótesis del continuo se sigue, en los tres casos, que existen no solamente ejemplos de la potencia del continuo,[22] sino incluso tales que son llevados en sí mismos (hasta numerablemente muchos puntos) por *cada* traslación de la línea recta (Sierpiński 1935a: 43).

Otras consecuencias altamente implausibles de la hipótesis del continuo son que existen: (1) subconjuntos de una línea recta de la potencia del continuo que están cubiertos (hasta numerablemente muchos puntos) por *cada* conjunto denso de intervalos (Lusin 1914: 1259); (2) infinitos subconjuntos dimensionales del espacio de Hilbert que no contienen ningún subconjunto finito-dimensional no-denumerable (en el sentido de Menger-Urysohn) (Hurewicz 1932: 8); (3) una secuencia infinita A^i de descomposiciones de cualquier conjunto *M* de la potencia del continuo en continuo muchos conjuntos mutuamente excluyentes A_x^i tales que, en cualquier forma que se elija un conjunto $A_{x_i}^i$ para cada *i*, $\Pi_{i=0}^{\infty}(M - A_{x_i}^i)$ es denumerable.[23] (1) y (3) son muy inverosímiles incluso si "potencia del continuo" es reemplazado por "$\aleph_1$".

Uno puede decir que muchos resultados de la teoría de conjuntos de puntos obtenidos sin recurrir a la hipótesis del continuo también son altamente inesperados e inverosímiles (Blumenthal 1940: 346). Pero, aunque eso puede ser cierto, la situación allí es distinta en que, en la mayoría de tales instancias (como, p. ej., las curvas de Peano), la apariencia de lo contrario puede explicarse por una ausencia de acuerdo entre nuestros conceptos geométricos intuitivos y los de la teoría de conjuntos que ocurren en los

[22] Para el tercer caso véase Sierpiński 1934a (1ª ed.): 39, Teorema 1.

[23] Véase Braun y Sierpiński 1932: 1, proposición (Q). Esta proposición es equivalente a la hipótesis del continuo.

teoremas. También es muy sospechoso que, en contra de las numerosas proposiciones plausibles que implican la negación de la hipótesis del continuo, no se conozca ninguna proposición plausible que implicaría a la hipótesis del continuo. Creo que, sumando todo lo que se ha dicho, uno tiene buenas razones para sospechar que el papel del problema del continuo en la teoría de conjuntos será el de llevar al descubrimiento de nuevos axiomas que harán posible refutar la conjetura de Cantor.

Definiciones de algunos de los términos técnicos

Las definiciones 4-15 se refieren a subconjuntos de una línea recta, pero pueden transferirse literalmente a subconjuntos de espacios euclidianos de cualquier número de dimensiones si “intervalo” es identificado con “interior de un paralelepípedo”.

1. Llamo *el carácter de confinalidad* de un número cardinal *m* (abreviado como “cf (*m*)”) al menor número *n* tal que *m* es la suma de *n* números $<m$.

2. Un número cardinal *m* es *regular* si cf (*m*) = *m*; de otro modo es singular.

3. Un número cardinal infinito *m* es *inaccesible* si es regular y no tiene predecesor inmediato (i. e., si, aunque es un límite de números $<m$, no es un límite de menos de *m* de tales números); es *fuertemente inaccesible* si cada producto (y, por tanto, también cada suma) de menos de *m* números $<m$ es $<m$. (Véase Sierpiński y Tarski 1930: 292; Tarski 1938: 68.)

De la hipótesis generalizada del continuo se sigue que estos dos conceptos son equivalentes. $\aleph_0$ es evidentemente inaccesible, y también es fuertemente inaccesible. En cuanto a números finitos, 0 y 2 y ningún otro son fuertemente inaccesibles. Una definición de inaccesibilidad aplicable a números finitos es esta: *m* es inaccesible si (1) cualquier suma de menos de *m* números $<m$ es $<m$, y (2) el número de números $<m$ es *m*. Esta definición, para números transfinitos, concuerda con la ofrecida arriba, y para números finitos da a 0, 1, 2 como inaccesibles. Así que la inaccesibilidad y la inaccesibilidad fuerte resultan no ser equivalentes para números finitos. Esto arroja alguna duda sobre su equivalencia para números transfinitos, que se sigue de la hipótesis generalizada del continuo.

4. Un conjunto de intervalos es *denso* si cada intervalo tiene puntos en común con algún intervalo del conjunto. (Los puntos finales de un intervalo no son considerados como puntos del intervalo.)

5. Un *conjunto-cero* es un conjunto que puede ser cubierto por infinitos conjuntos de intervalos con suma de longitudes arbitrariamente pequeña.

6. Una *vecindad* de un punto *P* es un intervalo conteniendo a *P*.

7. Un subconjunto *A* de *B* es *denso en B* si cada vecindad de cualquier punto de *B* contiene puntos de *A*.

8. Un punto *P* está en el *exterior* de *A* si tiene una vecindad no conteniendo ningún punto de *A*.

9. Un subconjunto *A* de *B no es denso en ninguna parte en B* si aquellos puntos de *B* que están en el exterior de *A* son densos en *B*, o (lo que es equivalente) si para ningún intervalo *I* la intersección *IA* es densa en *IB*.

10. Un subconjunto *A* de *B* es *de la primera categoría en B* si es la suma de numerablemente muchos conjuntos no densos en ninguna parte en *B*.

11. Un conjunto *A* es *de la primera categoría sobre B* si la intersección *AB* es de la primera categoría en *B*.

12. Un punto *P* es llamado *un punto límite* de un conjunto *A* si cualquier vecindad de *P* contiene infinitos puntos de *A*.

13. Un conjunto *A* es llamado *cerrado* si contiene todos sus puntos límite.

14. Un conjunto es *perfecto* si es cerrado y no tiene ningún punto aislado (i. e., ningún punto con una vecindad no conteniendo ningún otro punto del conjunto).

15. Los *conjuntos de Borel* son definidos como el menor sistema de conjuntos satisfaciendo los postulados:

(1) Los conjuntos cerrados son conjuntos de Borel.

(2) El complemento de un conjunto de Borel es un conjunto de Borel.

(3) La suma de numerablemente muchos conjuntos de Borel es un conjunto de Borel.

16. Un conjunto es *analítico* si es la proyección ortogonal de algún conjunto de Borel de un espacio de dimensión inmediatamente superior. (Cada conjunto de Borel es por tanto, desde luego, analítico.)

Suplemento a la segunda edición [1963]

Desde la publicación del artículo anterior se ha obtenido un número de nuevos resultados; me gustaría mencionar aquellos que son de interés especial para las discusiones precedentes.

1. A. Hajnal ha probado que, si $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$ pudiese derivarse de los axiomas de la teoría de conjuntos, también podría derivarse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (1956: 131). Este sorprendente resultado podría facilitar mucho la solución del problema del continuo si la hipótesis del continuo de Cantor fuese demostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos, lo que, no obstante, probablemente no es el caso.

2. Algunas nuevas consecuencias de, y proposiciones equivalentes a, la hipótesis de Cantor pueden encontrarse en la nueva edición del libro de W. Sierpiński (1934a, 2ª ed.). En la primera edición se había probado que la hipótesis del continuo es equivalente a la proposición de que el plano euclidiano es la suma de numerablemente muchas "curvas generalizadas" (donde una curva generalizada es un conjunto de puntos definible por una ecuación $y = f(x)$ en algún sistema de coordenadas cartesianas). En la segunda edición (p. 207)[24] se señala que puede probarse que el plano euclidiano es la suma de menos de continuo muchas curvas generalizadas bajo la mucho más débil asunción de que la potencia del continuo no es un número inaccesible. Una prueba de la inversa de este teorema daría alguna plausibilidad a la hipótesis de que $2^{\aleph_0} =$ el menor número inaccesible $> \aleph_0$. Sin embargo, se requiere mucha cautela con respecto a esta inferencia, porque la apariencia

[24] O Sierpiński 1951: 9. Véanse resultados relacionados en Kuratowski (1951: 15) y Sikorski 1951: 18.

paradójica en este caso (como en las “curvas” de Peano) se debe (al menos en parte) a una transferencia de nuestra intuición geométrica de curvas a algo que tiene sólo algunas de las características de las curvas. Nótese que nada de este tipo está involucrado en las contraintuitivas consecuencias de la hipótesis del continuo mencionadas en páginas anteriores.

3. C. Kuratowski ha formulado un fortalecimiento de la hipótesis del continuo (1948: 131), cuya consistencia se sigue de la prueba de consistencia mencionada en la sección 4. Después sacó varias consecuencias a partir de esta nueva hipótesis.

4. En años recientes (véanse las notas 13 y 16) se han obtenido nuevos resultados muy interesantes acerca de los axiomas del infinito.

En oposición al punto de vista defendido en la sección 4 se ha sugerido (Errera 1953: 176-83) que, en caso de que el problema del continuo de Cantor resultara ser indecidible a partir de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, la cuestión de su verdad perdería su significado, exactamente como la cuestión de la verdad del quinto postulado de Euclides por la prueba de la consistencia de la geometría no euclidiana se volvió insignificativa para el matemático. Ante esto me gustaría señalar que la situación en la teoría de conjuntos es muy distinta a la de la geometría, tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista epistemológico.

En el caso, por ejemplo, del axioma de la existencia de números inaccesibles (que puede probarse que es indecidible desde los axiomas de von Neumann-Bernays para la teoría de conjuntos siempre que sea consistente con ellos), hay una asimetría notable, matemáticamente hablando, entre el sistema en el que es afirmado y aquel en el que es negado.[25]

A saber, el último (pero no el primero) tiene un modelo que puede definirse y probarse para ser un modelo en el sistema original (no extendido). Esto significa que el primero es una extensión en un sentido mucho más fuerte. Un hecho íntimamente relacionado es que la afirmación (pero no la negación) del axioma implica nuevos teoremas

[25] La misma asimetría también ocurre en los niveles más bajos de la teoría de conjuntos, donde la consistencia de los axiomas en cuestión está menos sujeta a la duda de los escépticos.

acerca de los enteros (cuyas instancias individuales pueden verificarse por computación). Así que el criterio de verdad explicado en páginas anteriores está satisfecho, hasta cierto punto, para la afirmación, pero no para la negación. En breve, sólo la afirmación produce una extensión "fructífera", mientras que la negación es estéril fuera de su propio dominio muy limitado. También puede mostrarse que la hipótesis del continuo de Cantor es estéril para la teoría de números y es verdadera en un modelo constructible en el sistema original, mientras que para alguna otra asunción sobre la potencia del continuo esto quizás no es así. Por otro lado, ninguna de dichas asimetrías aplica al quinto postulado de Euclides. Para ser más precisos, tanto él como su negación son extensiones en el sentido débil.

En cuanto a la situación epistemológica, debe decirse que por una prueba de indecidibilidad una cuestión pierde su significado solamente si el sistema de axiomas bajo consideración es interpretado como un sistema hipotético-deductivo; i. e., si los significados de los términos primitivos quedan indeterminados. En la geometría, p. ej., la cuestión de si el quinto postulado de Euclides es verdadero conserva su significado si los términos primitivos se toman en un sentido definido, i. e., como refiriéndose al comportamiento de cuerpos rígidos, rayos de luz, etc. La situación en la teoría de conjuntos es similar, la diferencia es sólo que, en la geometría, el significado comúnmente adoptado hoy en día se refiere a la física en lugar de a la intuición matemática y, por tanto, una decisión cae fuera del rango de las matemáticas. Por otro lado, los objetos de la teoría de conjuntos transfinitos, concebidos de la manera explicada en páginas anteriores y en la nota 11, claramente no pertenecen al mundo físico, e incluso su conexión indirecta con la experiencia física es muy floja (debido principalmente al hecho de que los conceptos de la teoría de conjuntos desempeñan únicamente un papel menor en las teorías físicas de hoy en día).

Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensorial, sí tenemos algo como una percepción también de los objetos de la teoría de conjuntos, como se ve por el hecho de que los axiomas se nos imponen como verdaderos. No veo ninguna razón por la que debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, i. e., en la intuición matemática, que en la percepción sensorial, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que percepciones sensoriales futuras concordarán con ellas y, además, a creer que una cuestión no decidible ahora tiene significado y puede ser decidida en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más problemáticas para los matemáticos que lo que son para los físicos las decepciones de los sentidos. Que nuevas intuiciones matemáticas llevando a una decisión de tales problemas como la hipótesis del continuo de Cantor son perfectamente posibles ya fue señalado en páginas anteriores.

Debe notarse que la intuición matemática no necesita ser concebida como una facultad dando un conocimiento *inmediato* de los objetos en cuestión. Más bien parece que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* nuestras ideas también de aquellos objetos sobre la base de algo más que *está* inmediatamente dado. Sólo que aquí este algo más *no* son, o no son principalmente, las sensaciones. Que algo además de las sensaciones realmente está inmediatamente dado se sigue (independientemente de las matemáticas) del hecho de que incluso nuestras ideas que se refieren a objetos físicos contienen constituyentes cualitativamente distintos a las sensaciones o a meras combinaciones de sensaciones, por ejemplo, la idea del objeto mismo, mientras que, por otro lado, mediante nuestro pensamiento no podemos crear ningunos elementos cualitativamente nuevos, sino sólo reproducir y combinar aquellos que están dados. Evidentemente, lo "dado" que subyace en las matemáticas está íntimamente relacionado con los elementos abstractos contenidos en nuestras ideas empíricas.[26] Sin embargo, de ninguna manera se sigue que los datos de este segundo tipo, debido a que no pueden asociarse con acciones de ciertos tipos sobre nuestros órganos sensoriales, son algo puramente subjetivo, como afirmó Kant. Más bien sucede que ellos también pueden representar un aspecto de la realidad objetiva, pero, a diferencia de las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre nosotros y la realidad.

Empero, la cuestión de la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática (que, incidentalmente, es una réplica exacta de la cuestión de la existencia objetiva del mundo exterior) no es decisiva para el problema que estamos discutiendo. El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es suficientemente clara para

[26] Nótese que hay una estrecha relación entre el concepto de conjunto explicado en la nota 14 y las categorías del entendimiento puro en el sentido de Kant. A saber, la función de ambas es la "síntesis", i. e., la generación de unidades a partir de variedades (por ejemplo, en Kant, de la idea de *un* objeto a partir de sus varios aspectos).

producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de ellos basta para dar significado a la cuestión de la verdad o falsedad de proposiciones como la hipótesis del continuo de Cantor. Lo que, no obstante, quizás más que cualquier otra cosa, justifica la aceptación de este criterio de verdad en la teoría de conjuntos es el hecho de que apelaciones continuas a la intuición matemática son necesarias no sólo para obtener respuestas sin ambigüedades a las cuestiones de la teoría de conjuntos transfinitos, sino también para la solución de los problemas de la teoría de números finitos[27] (del tipo de la conjetura de Goldbach),[28] donde difícilmente puede dudarse de la significatividad y no ambigüedad de los conceptos que tienen lugar en ellos. Esto se sigue del hecho de que para cada sistema axiomático hay infinitas proposiciones indecidibles de este tipo.

Antes se señaló que, además de la intuición matemática, existe otro criterio (aunque solamente probable) de la verdad de los axiomas matemáticos, a saber, su fecundidad en las matemáticas y, uno puede agregar, posiblemente también en la física. Este criterio, sin embargo, aunque puede volverse decisivo en el futuro, todavía no puede aplicarse a los axiomas específicos de la teoría de conjuntos (como aquellos que se refieren a números cardinales grandes), porque se sabe muy poco sobre sus consecuencias en otros campos. El caso más simple de una aplicación del criterio bajo discusión surge cuando algún axioma de la teoría de conjuntos tiene consecuencias numérico-teóricas verificables por computación hasta cualquier entero dado. No obstante, sobre la base de lo que se sabe hoy en día, no es posible hacer la verdad de cualquier axioma de la teoría de conjuntos razonablemente probable de este modo.

Post scriptum

Poco después de terminar el manuscrito de este artículo, la cuestión de si la Hipótesis del Continuo de Cantor es demostrable a partir de los axiomas de von Neumann-Bernays para la teoría de conjuntos (incluido el axioma de elección) fue resuelta en lo negativo por Paul J. Cohen (1963a, 1964). Resulta que para un amplio rango de $\aleph_\tau$, la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_\tau$ es consistente y una extensión en el sentido débil (esto es, no implica nuevos teoremas

[27] A menos que uno esté satisfecho con decisiones inductivas (probables), como verificar el teorema hasta números muy grandes, o con procedimientos inductivos más indirectos (véanse páginas anteriores).
[28] I. e., proposiciones universales acerca de enteros que pueden decidirse en cada instancia individual.

numérico-teóricos). Si para un concepto adecuado de definición “estándar” existen $\aleph_\tau$ definibles no excluidos por el teorema de König (véase arriba) para los que esto no es así sigue siendo una cuestión abierta (desde luego, debe asumirse que la existencia de los $\aleph_\tau$ en cuestión es o bien demostrable o ha sido postulada).