Sobre una propiedad del conjunto de los números algebraicos reales

Por

Georg Cantor

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: ON A PROPERTY OF THE SET OF REAL ALGEBRAIC NUMBERS (1874)

Por un número algebraico real uno generalmente entiende un número real ω que satisface una ecuación no constante de la forma:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

donde $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ son enteros: aquí podemos imaginar que los números n y a_0 son positivos, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ no tienen partes comunes, y la ecuación (1) es irreducible; con estas estipulaciones resulta que, por los consabidos teoremas fundamentales de la aritmética y del álgebra, la ecuación (1), que está satisfecha por un número algebraico real, está completamente determinada; a la inversa, si n es el grado de una ecuación de la forma (1), entonces la ecuación está satisfecha por a lo mucho n números algebraicos reales ω. Los números algebraicos reales forman en su totalidad un conjunto [Inbegriff] de números, que será designado por (ω); como fácilmente se ve, (ω) tiene la propiedad de que en cada vecindad de cualquier número dado α hay infinitos números de (ω). Así que a primera vista debería de ser lo más sorprendente que uno pueda correlacionar el conjunto (ω) uno-a-uno con el conjunto (designado por el signo (v)) de todos los enteros positivos v – de un modo tal que a cada número algebraico ω le corresponda un entero positivo definido, y, a la inversa, a cada entero positivo v le corresponda un número algebraico real ω completamente definido. O, para decir lo mismo con distintas palabras, el conjunto (ω) puede pensarse en la forma de una secuencia legaliforme infinita [gesetzmässigen Reihe]

$$\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_v, \ldots \qquad (2)$$

en la que aparecen todos los individuos de (ω) y cada uno de los cuales ocurre en (2) en una posición definida, que está dada por el índice que acompaña. Tan pronto como uno ha encontrado una ley por la que pueda pensarse tal correlación, ésta puede modificarse a voluntad; así que en §1 describiré la correlación que me parece ser la menos complicada.

Con el fin de ofrecer una aplicación de esta propiedad del conjunto de todos los números algebraicos reales, en §2 muestro que, dada cualquier secuencia arbitrariamente elegida de números reales de la forma (2), entonces, en cualquier intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$, uno puede determinar [bestimmen] números η que *no* están contenidos en (2); si uno combina los resultados de estos últimos dos párrafos, entonces uno tiene una nueva prueba del teorema, probado primeramente por Liouville, de que en cualquier intervalo dado $(\alpha...\beta)$ hay infinitos números reales *trascendentales* (es decir, no algebraicos). Además, el teorema en §2 resulta ser la razón por la que conjuntos de números reales que forman un así llamado continuo (digamos, todos los números reales que son ≥ 0 y ≤ 1) no pueden ser mapeados uno-a-uno sobre el conjunto (ν); así, he descubierto la diferencia entre un así llamado continuo y cualquier conjunto como la totalidad de los números algebraicos reales.

§1.

Regresemos a la ecuación (1), que está satisfecha por un número algebraico ω y que, bajo las estipulaciones mencionadas, está completamente determinada. Entonces la suma de los valores absolutos de sus coeficientes, más el número $n-1$ (donde *n* es el grado de ω), será llamada la *altura* del número ω. Designémosla con *N*. Esto es, en la notación habitual:

$$N = n-1+|a_0|+|a_1|+...+|a_n|. \qquad (3)$$

Así, la altura *N* es para cada número algebraico real ω un entero positivo definido; a la inversa, para cada valor integral positivo de *N* hay sólo finitos números reales algebraicos con altura *N*. Sea $\phi(N)$ este número; entonces, por ejemplo, $\phi(1)=1$; $\phi(2)=2$; $\phi(3)=4$. Los números del conjunto (ω), i. e., todos los números reales algebraicos, pueden entonces ordenarse de la siguiente manera: uno toma como el primer número ω_1 al número con la altura $N=1$; permítase que los $\phi(2)=2$ números reales algebraicos con la altura $N=2$ los sigan conforme al tamaño, y designémoslos con ω_2, ω_3; éstos son seguidos por los $\phi(3)=4$ números con altura $N=3$, conforme al tamaño. En general, después de que todos los números en (ω) hasta una cierta altura $N=N_1$ han sido enumerados [abgezählt] y asignados a un lugar definido, los números algebraicos reales con la altura $N=N_1+1$ los siguen conforme al tamaño; de este modo uno obtiene el conjunto (ω) de todos los números algebraicos reales en la forma:

$$\omega_1, \omega_2, ...\omega_\nu, ...$$

Con respecto a este ordenamiento [Anordnung], uno puede hablar del *v*-ésimo número algebraico real; ni un solo miembro del conjunto ha sido omitido.

§2.

Supóngase que tenemos una secuencia infinita de números reales

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_v, \ldots \qquad (4)$$

donde la secuencia está dada de acuerdo con cualquier ley y donde los números son distintos el uno del otro. Entonces en cualquier intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$ puede determinarse un número η (y consecuentemente infinitos de tales números) tal que no ocurra en la serie (4); esto se probará ahora.

Vamos al final del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, que nos ha sido dado arbitrariamente y en el que $\alpha < \beta$; los primeros dos números de nuestra secuencia (4) que yacen al interior de este intervalo (con la excepción de los límites) pueden ser designados por α', β', permitiendo que $\alpha' < \beta'$; similarmente, designemos a los primeros dos números de nuestra secuencia que yacen al interior de $(\alpha' \ldots \beta')$ con α'', β'', y sea $\alpha'' < \beta''$; y del mismo modo uno construye el siguiente intervalo $(\alpha''' \ldots \beta''')$, y así sucesivamente. Aquí, por tanto, $\alpha', \alpha'' \ldots$ son, por definición, números determinados de nuestra secuencia (4), cuyos índices están continuamente aumentando; lo mismo vale para la secuencia $\beta', \beta'' \ldots$. Además, los números $\alpha', \alpha'', \ldots$ siempre están aumentando en tamaño, mientras que los números $\beta', \beta'', \ldots$ siempre están disminuyendo en tamaño. De los intervalos $(\alpha \ldots \beta), (\alpha' \ldots \beta'), (\alpha'' \ldots \beta''), \ldots$, cada uno encierra a todos aquellos que siguen. Ahora, aquí solamente dos casos son concebibles.

O bien el número de intervalos así formados es finito, en cuyo caso sea $(\alpha^{(v)} \ldots \beta^{(v)})$ el último de ellos. Ya que en su interior puede haber a lo mucho un número de la secuencia (4), de este intervalo puede elegirse un número η que no esté contenido en (4), de este modo probando el teorema para este caso.

O bien el número de intervalos construidos es infinito. Entonces los números $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, debido a que siempre están aumentando en tamaño sin crecer en lo infinito, tienen un valor límite determinado α^{∞}; lo mismo vale para los números $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, porque siempre están disminuyendo en tamaño. Sea β^{∞} su valor límite. Si $\alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ (un caso que ocurre constantemente con el conjunto (ω) de todos los números algebraicos reales), entonces uno fácilmente se persuade a sí mismo, si echa un ojo a la definición de los intervalos, de que el número $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ *no puede* estar contenido en nuestra secuencia;[1] pero si $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, entonces cada número η al interior del intervalo $(\alpha^{\infty} \ldots \beta^{\infty})$ o también sobre sus límites satisface el requerimiento de que no esté contenido en la secuencia (4).

Los teoremas probados en este artículo admiten extensiones en varias direcciones, de las que aquí mencionaré solamente una:

"Si $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ es una secuencia finita o infinita de números que son linealmente independientes entre sí (de modo que ninguna ecuación de la forma $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n = 0$ es posible con coeficientes integrales que no todos desaparecen), y si uno imagina al conjunto (Ω) de todos aquellos números Ω que pueden ser representados como funciones racionales con coeficientes integrales de los números dados ω, entonces en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ hay infinitos números que no están contenidos en (Ω)."

De hecho, uno se persuade a sí mismo mediante un método de prueba similar al que está en §1 de que el conjunto (Ω) puede concebirse en la forma secuencial

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_v, \ldots$$

desde donde, en vista de §2, se sigue la exactitud del teorema.

---

[1] Si el número η estuviese contenido en nuestra secuencia, entonces uno tendría que $\eta = \omega_p$, donde *p* es un índice definido. Pero esto no es posible, porque ω_p *no* yace al interior del intervalo $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, mientras que, por definición, el número η sí yace al interior del intervalo.

Un caso bastante especial del teorema citado aquí (en donde la secuencia $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ es finita y el grado de las funciones racionales, que producen el conjunto (Ω), está estipulado por adelantado) ha sido probado, recurriendo a principios galoisianos, por el señor B. Minnigerode (véase *Math. Annalen*, vol. 4, p. 497).