Sobre la lógica matemática

Por

Thoralf Skolem

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: Über die mathematische Logik

Publicado originalmente en *Norsk Matematisk Tidsskrift* 10, Aargang, 1928, pp. 126-142. La Sociedad Matemática Noruega otorgó a esta colección los correspondientes permisos de traducción y publicación de esta obra.

La lógica, como es sabido, fue establecida como una ciencia por Aristóteles. Todo el mundo ha oído hablar del silogismo aristotélico. Durante toda la Edad Media, las figuras silogísticas de Aristóteles constituyeron el contenido principal de la lógica. Se dice que Kant observó alguna vez que la lógica era la única ciencia que no había hecho ningún progreso desde la antigüedad. Quizás esto era cierto en aquel entonces, pero hoy en día ya no lo es.

Pues los tiempos recientes han sido testigos del desarrollo del cálculo de la lógica, como se le llama, o de la lógica matemática, una teoría que ha ido mucho más allá de la lógica aristotélica. Ha sido desarrollada por matemáticos, y los filósofos profesionales han tenido muy poco interés en ella, presumiblemente porque la encuentran demasiado matemática. Por otra parte, la mayoría de los matemáticos también han tenido poco interés en ella, porque la encuentran demasiado filosófica.

No pretendo ofrecer una exposición precisa de la historia de esta disciplina. Menciono los nombres de Leibniz, Lambert, Boole, Peirce, Macfarlane, y Frege. El matemático alemán Schröder escribió un extenso trabajo, *Algebra der Logik* (tres volúmenes: *1890*, *1891*, *1895*), que es muy valioso. Una tendencia distinta fue inaugurada por el matemático italiano Peano, así como por Frege, cuidadosa y detalladamente desarrollada por los ingleses Russell y Whitehead. Éstos escribieron un extenso trabajo, *Principia Mathematica* (*1910*, *1912*, *1913*), en el que pretenden desarrollar todas las matemáticas como una parte de la lógica matemática. De los autores más recientes me gustaría mencionar a Löwenheim, Behmann, Schönfinkel, Chwistek, Ramsey, y Langford. Por último, también pertenecen aquí algunas de las investigaciones de Hilbert y sus colaboradores, Bernays, von Neumann, y Ackermann, sobre los fundamentos de las matemáticas.

Antes que nada, me gustaría discutir una de las partes más simples del cálculo de la lógica, el cálculo idéntico, con cierto detalle. Éste puede desarrollarse como un cálculo de clases o regiones (digamos, en un plano). Consideramos una totalidad de objetos; a esta totalidad se le llama la clase universal y está denotada por 1. Por el otro lado, ha de haber una clase nula, 0; no contiene ningún elemento en absoluto. Si a y b son dos clases arbitrarias, puede suceder que cada objeto ocurriendo en a también ocurra en b; para tal relación escribo $a \leq b$. Si tanto $a \leq b$ como $b \leq a$, escribo $a = b$. De las clases a y b podemos separar la mayor parte común; esta clase será denotada por ab. Asimismo, podemos combinar los objetos ocurriendo en a o b en una clase, que será denotada por $a+b$. Finalmente, los objetos que no ocurren en a forman una clase, que denotaremos por $\bar{a}$. Entonces podemos desarrollar un álgebra en la que $\leq$ ocurre como la relación fundamental y [en la que] tenemos las tres operaciones mencionadas. Entre otras, se sostienen las siguientes leyes:

$$0 \leq a,\ a \leq 1,\ a \leq a,\ a\bar{a} = 0,\ a + \bar{a} = 1,\ \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b},\ \overline{a+b} = \bar{a}\bar{b},$$

$$a(b+c) = ab + ac,\ a + bc = (a+b)(a+c),$$

y, además, las reglas de inferencia

$$(a \leq b)(b \leq c) \rightarrow (a \leq c),\ (c \leq ab) \rightleftarrows (c \leq a)(c \leq b),$$

$$(a + b \leq c) \rightleftarrows (a \leq c)(b \leq c).$$

Debemos observar, no obstante, que las operaciones de multiplicación idéntica y de adición idéntica también pueden extenderse a un número infinito de operandos. Por el producto idéntico $\prod_{\kappa} a_{\kappa}$ de un número arbitrario de clases a_{κ}, donde κ se extiende sobre un cierto suministro de valores, entendemos la clase de todos los elementos que son comunes a toda a_{κ}. Por la suma idéntica $\sum_{\kappa} a_{\kappa}$ entendemos la clase de todos los objetos que ocurren en al menos una de las a_{κ}.

No me detendré mucho en este cálculo, pero me gustaría mostrar, a modo de ejemplo, cómo pueden resolverse en él ecuaciones conteniendo incógnitas. Si está dada una ecuación de la forma

$$ax + b\bar{x} = 0$$

(cada ecuación puede llevarse a la forma $A = 0$, y cada sistema de ecuaciones simultáneas puede escribirse como una sola ecuación), encontramos que $ab = 0$ es la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, y que la solución general está dada por

$$x = \bar{a}u + b\bar{u},$$

donde *u* representa una clase arbitraria.

Prueba. $ab = ab(x + \bar{x}) = abx + ab\bar{x} \leq ax + b\bar{x} = 0.$ Si $ax + b\bar{x} = 0,$ entonces $x = (a + \bar{a})x = ax + \bar{a}x = \bar{a}x + b\bar{x},$ ya que tanto ax como $b\bar{x}$ son iguales a 0. Por lo tanto, cada solución tiene la forma $\bar{a}u + b\bar{u}$. Si $x = \bar{a}u + b\bar{u}$, se sigue, cuando $ab = 0,$ $ax = a\bar{a}u + ab\bar{u} = 0.$

Pero también podemos resolver ecuaciones con un número completamente arbitrario de incógnitas. Por ejemplo, esté dada la ecuación

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda} x_{\lambda} + \sum_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} \bar{x}_{\mu} \bar{x}_{\nu} = 0 \quad (a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}),$$

donde los subíndices varían sobre un suministro dado de valores; asúmase que están dadas las clases *a* pero que las *x* son incógnitas. Aquí, encontramos que

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu} a_{\nu} a_{\mu,\nu} = 0$$

es la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, y que

$$x_{\kappa} = \bar{a}_{\kappa} (u_{\kappa} + \sum_{\lambda} a_{\kappa,\lambda} (a_{\lambda} + \bar{u}_{\lambda}))$$

es la solución general.

Otro ejemplo es

$$\sum_{\mu,\nu}{}' a_{\mu,\nu} (x_{\mu} x_{\nu} + \bar{x}_{\mu} \bar{x}_{\nu}) = 0 \quad (a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}),$$

donde el primo sobre $\sum$ significa que μ y ν siempre tomarán distintos valores. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución aquí es

$$\Sigma P = 0,$$

donde P varía sobre todos los posibles productos finitos de los coeficientes a en los que los pares de subíndices μ, ν forman un ciclo con un número impar de términos. Por tanto, esto muestra que en tales problemas nos vemos llevados a peculiares cuestiones combinatorias.

Pero no consideraré con más detalle problemas de este tipo; más bien, procederé a discutir las nociones generales y las operaciones de la lógica matemática más reciente.

Las nociones fundamentales de la lógica matemática son las siguientes:

(1) Proposiciones; verdaderas y falsas;

(2) Funciones proposicionales de variables; propiedades (clases) y relaciones (relaciones y correspondencias).

Las operaciones lógicas son

(1) Las elementales: conjunción, disyunción, y negación;

(2) Las mayores: “todos” y “existe”.

Asumimos que, si una oración tiene sentido, es verdadera o falsa. Si una proposición expresa algo sobre un objeto x – entonces la escribo como $A(x)$ – puede suceder que tenga sentido para todos los valores de x dentro de un cierto dominio. Entonces decimos que $A(x)$ es una función proposicional si x es una variable que puede tomar valores arbitrarios en ese dominio. Si un valor específico es sustituido por x, obtenemos una proposición que será verdadera o falsa dependiendo de las circunstancias. De manera similar podemos formar funciones proposicionales de dos, tres, o más variables: $A(x, y), A(x, y, z), \ldots.$ Si un valor específico es sustituido por y en $A(x, y),$ obtenemos una función proposicional de x solamente; si valores específicos son sustituidos por x así como por y, obtenemos una proposición. La función proposicional “x es un número primo” es una función $P(x)$ de x; por ejemplo, $P(3)$ es verdadera pero $P(6)$ es falsa. La función proposicional “x e y son relativamente primos” tiene dos argumentos; para $x = 8$ y $y = 15$, por ejemplo, produce una proposición verdadera, y para $x = 6$ y $y = 21$ una falsa.

Una función proposicional como $A(x)$ representa lo que se llama una "propiedad"; decimos que los objetos *x* para los cuales $A(x)$ se vuelve una proposición verdadera forman una "clase". Las funciones proposicionales de varias variables representan "relaciones".

Las tres operaciones elementales son aquellas que en el lenguaje ordinario están dictadas por las palabras "y", "o", y "no". En la notación de Schröder, las proposiciones "*A* así como *B*", "o *A* o *B*", y "no *A*", donde *A* y *B* son proposiciones dadas, se escriben como $AB, A+B,$ y $\overline{A},$ respectivamente.

Por lo tanto, la expresión $\overline{A}+B$ significa "o no *A* o *B*". Esto es claramente lo mismo que "si *A* vale, también lo hace *B*", o "de *A*, se sigue *B*". A esto se le llama implicación, y es por tanto reducible a las primeras tres operaciones mencionadas. La disyunción, además, puede reducirse a la conjunción y la negación, porque $A+B$ significa lo mismo que $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

Estas operaciones elementales son claramente aplicables tanto a proposiciones como a funciones proposicionales. Las dos operaciones mayores, expresadas con las palabras "todos" y "existe", son, no obstante, únicamente aplicables a funciones proposicionales. Tienen el efecto de que para una o más variables las sustituciones se vuelven imposibles, las variables siendo transformadas desde "reales" o "libres" en "aparentes" o "acotadas".

Si $A(x)$ es una función proposicional, podemos formar las proposiciones "$A(x)$ es verdadera para todo *x*" y "existe un *x* tal que $A(x)$ es verdadera"; siguiendo a Schröder, escribimos éstas como $\prod_x A(x)$ y $\sum_x A(x)$, respectivamente. Claramente, aquí no puede hacerse ninguna sustitución por *x*; por lo tanto, *x* se ha vuelto una variable aparente, justo como una variable de integración. A partir de una función proposicional $A(x, y)$ podemos primero formar las funciones proposicionales $\prod_y A(x, y), \sum_y A(x, y), \prod_x A(x, y),$ y $\sum_x A(x, y);$ las primeras dos son funciones de *x* (pero no de *y*), las últimas dos son funciones de *y*. Desde estas, entonces, pueden a la vez formarse las proposiciones

$\prod_x \prod_y A(x,y), \sum_x \prod_y A(x,y),$ y así sucesivamente. Inmediatamente vemos que la proposición $\sum_x \prod_y A(x,y)$ significa que existe un *x* tal que, cuando este *x* permanece constante, $A(x,y)$ es verdadera para todo *y*, mientras que la proposición $\prod_y \sum_x A(x,y)$ significa que para cada *y* existe un *x*, que en general depende de *y*, tal que $A(x,y)$ se sostiene. Desde luego, podemos formar proposiciones como $\prod_x (A(x) \sum_y B(x,y)),$ y así sucesivamente.

Aquí van algunos simples ejemplos de la aritmética:

$$\prod_x \sum_y (x < y), \quad \sum_x \prod_y (x \leq y), \quad \prod_x \sum_y (x < y) \prod_z ((z \leq x) + (y \leq z)),$$

donde las variables se extienden sobre la secuencia de números naturales. La primera proposición significa que para cada número existe uno mayor, la segunda que existe un menor número natural, y la tercera que entre todos los números que son mayores que *x* existe uno menor.

Ahora no sólo podemos ofrecer una formulación precisa a proposiciones matemáticas, sino también representar pruebas matemáticas como transformaciones de tales expresiones lógicas de acuerdo con ciertas reglas. Por ejemplo, tenemos las reglas

$$\mathop{\Pi}_x A\,B(x) \rightleftarrows A \mathop{\Pi}_x B(x), \quad \mathop{\Sigma}_x (A + B(x)) \rightleftarrows A + \mathop{\Sigma}_x B(x),$$
$$\mathop{\Pi}_x (A + B(x)) \rightleftarrows A + \mathop{\Pi}_x B(x), \quad \mathop{\Sigma}_x A\,B(x) \rightleftarrows A \mathop{\Sigma}_x B(x),$$
$$\overline{\mathop{\Pi}_x A(x)} \rightleftarrows \mathop{\Sigma}_x \overline{A(x)}, \quad \overline{\mathop{\Sigma}_x A(x)} \rightleftarrows \mathop{\Pi}_x \overline{A(x)}.$$

Pero no entro en esto más profundamente, especialmente porque creo que es posible tratar con problemas de deducción de otro modo, más conveniente, al que regresaré en un momento.

Si están dadas ciertas funciones proposicionales, junto con un rango para los valores de las variables, estamos en posición de formar, desde ellas, otras funciones proposicionales y proposiciones por medio de las cinco operaciones lógicas. Los valores de las variables pueden llamarse "individuos". Las funciones proposicionales y las proposiciones que tienen individuos como argumentos y en las que "todos" y "existe" se aplican únicamente a *individuos* variables a menudo son llamadas *funciones proposicionales de primer orden* y *proposiciones de primer orden*, respectivamente.[1] Debe notarse, sin embargo, que la construcción lógica de proposiciones no termina aquí. Pues podemos tener una función proposicional variable en una expresión proposicional, y entonces "todos" y "existe" también pueden aplicarse a ella. Así, por ejemplo,

$$\prod_x (\overline{U(x)} + V(x)),$$

donde U y V son funciones proposicionales variables, es una proposición sobre U y V; esto es, la expresión es una función proposicional de un tipo lógico mayor, teniendo funciones proposicionales de primer orden como argumentos. Pero también podemos obtener funciones de un tipo mayor cuyos argumentos siguen siendo individuos. Un ejemplo simple es

$$\prod_U (U(x)U(y) + \overline{U(x)}\,\overline{U(y)});$$

esta expresión representa una función proposicional cuyos argumentos son x e y, ya que en ella el cuantificador universal gobierna a la función proposicional variable U. De este modo se hace muy complicada la construcción de funciones proposicionales, y no puede negarse que surgen cuestiones muy difíciles de responder. Si "todos" y "existe" se aplican a funciones proposicionales variables, surge la cuestión: ¿cuál es la totalidad de todas las funciones proposicionales? Me parece que aquí sólo hay dos concepciones científicamente sostenibles, a saber:

1. Podemos empezar desde ciertas funciones proposicionales primitivas realmente dadas, es decir, listadas. Otras funciones se forman desde éstas, primero, por medio de las cinco operaciones de un modo tal que "todos" y "existe" se apliquen únicamente a individuos. Esto produce la totalidad de funciones proposicionales del primer nivel (las

[1] Se entiende, desde luego, que en todas estas expresiones las operaciones lógicas se utilizan solamente un número finito de veces.

funciones de primer orden). Una vez formada esta totalidad, es significativo, por una parte, formar funciones cuyos argumentos sean funciones del primer nivel; por la otra, podemos formar funciones que tengan individuos como argumentos pero que resulten de la aplicación de “todos” y “existe” a funciones del primer nivel. Así, obtenemos funciones del segundo nivel, pero de dos tipos esencialmente distintos. Siempre que las funciones constructibles de un cierto “nivel”, o “tipo”, sean reunidas en una totalidad, se hace posible la formación de nuevas funciones.

2. Podemos intentar introducir la noción de función proposicional (que, después de todo, corresponde con bastante precisión a la noción de “conjunto”) por medio de una axiomatización, justo como axiomatizamos la teoría de conjuntos. Entonces los axiomas se volverán proposiciones de primer orden, ya que los objetos de la axiomatización (aquí las “funciones proposicionales”, en la teoría de conjuntos los “conjuntos”) asumirán el papel de individuos. Entonces las relaciones entre argumentos y funciones aparecerán en la axiomatización como funciones primitivas, justo como la relación ε (elemento de) aparece como función primitiva en la teoría de conjuntos axiomática.

Me permito aquí una observación sobre la relación entre las nociones fundamentales de la lógica y las de la aritmética. No importa si introducimos la noción de función proposicional de la primera o la segunda manera, nos enfrentamos a la idea del número entero. Pues, incluso cuando la noción de función proposicional es introducida axiomáticamente, tendremos que considerar (por ejemplo, en investigaciones relativas a la consistencia) qué podemos derivar al utilizar los axiomas un número finito arbitrario de veces. Por otro lado, no es posible caracterizar lógicamente la secuencia de números sin la noción de función proposicional. Pues tal caracterización debe ser equivalente al principio de inducción matemática, y éste dice lo siguiente: si una función proposicional $A(x)$ vale para $x=1$ y si $A(x+1)$ es verdadera siempre que $A(x)$ es verdadera, entonces $A(x)$ es verdadera para cada *x*. En signos, adquiere la forma

$$\prod_U (\overline{U(1)} + \sum_x U(x)\overline{U(x+1)} + \prod_y U(y)).$$

Esta proposición claramente involucra a la totalidad de funciones proposicionales. Por lo tanto, el intento por basar las nociones de la lógica sobre las de la aritmética, o viceversa, me parece estar equivocado. Los fundamentos para ambas deben fijarse simultáneamente y de manera interrelacionada.

No entraré más profundamente en estas difíciles cuestiones; en su lugar, indicaré cómo los problemas de deducción para proposiciones de primer orden pueden reducirse a un problema de aritmética combinacional. Si *U* y *V* son proposiciones de primer orden y si planteamos la cuestión de si *V* se sigue de *U*, esto es equivalente a preguntar si $U\overline{V}$ es una contradicción o no. Es por tanto evidente que todo depende de si somos capaces de decidir si una proposición de primer orden dada es contradictoria o no.

Esté dada una proposición de primer orden $Z(A, B, C, \ldots)$, donde $A, B, C, \ldots$ son las funciones proposicionales dadas ocurriendo en ella; llamo a éstas funciones primitivas. Puedo asumir que *Z* tiene la forma

$$\prod_{x_1}\prod_{x_2}\ldots\sum_{y_1}\sum_{y_2}\ldots\prod_{z_1}\prod_{z_2}\ldots U(x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots).$$

Este axioma obviamente significa que, si $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ están arbitrariamente dadas, es posible introducir $y_1, y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots,$ donde las *y* dependen únicamente de las *x*, las *u* únicamente de las *x* y las *z*, y así sucesivamente, y determinar los valores de verdad de las funciones $A, B, C, \ldots$ para estos argumentos de un modo tal que *U* resulte ser verdadera. Ya que no importa qué notación utilicemos para los símbolos, podemos introducir el siguiente simbolismo, que probablemente es más ventajoso para casi todas las investigaciones. En lugar de $y_1, y_2, \ldots,$ escribo $f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots;$ en lugar de $u_1, u_2, \ldots,$ escribo $g_1(x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots), g_2(x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots), \ldots;$ y así sucesivamente. La proposición de primer orden dada entonces significa que

$$U(x_1, x_2, \ldots, f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots, z_1, z_2, \ldots,$$
$$g_1(x_1, \ldots, z_1, \ldots), g_2(x_1, \ldots, z_1, \ldots), \ldots)$$

es verdadera para valores arbitrarios de $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ dentro de un cierto dominio.

Si ahora queremos investigar si este axioma es satisfacible o no, podemos proceder como sigue. Formemos, partiendo desde el símbolo 0, los símbolos $f_1(0,0,...), f_2(0,0,...),..., g_1(0,0,...), g_2(0,0,...),...,$ y así sucesivamente. Se dirá que 0 es el símbolo-individuo del nivel 0, mientras que se dirá que los símbolos $f_1(0,0,...)$, etc., son del primer nivel. Una vez definidos los símbolos-individuos hasta el *n*-ésimo nivel, los símbolos del $(n+1)$-ésimo nivel serán aquellos que resulten de la inserción de símbolos hasta el *n*-ésimo nivel como argumentos en las "funciones" $f_1, f_2,..., g_1, g_2,...$ y que no estén ya ocurriendo entre los símbolos del nivel 0 hasta el nivel *n*. A las secuencias $x_1, x_2,..., z_1, z_2,...$ formadas por los símbolos hasta el *n*-ésimo nivel las llamo secuencias de argumentos del *n*-ésimo nivel. Ahora debemos intentar asignar valores a las funciones $A, B, C,...$ de un modo tal que, para cada secuencia de argumentos en turno, *U* resulte verdadera. Para traducir todo al lenguaje matemático ordinario, denoto a los valores proposicionales "falso" y "verdadero" con 0 y 1, respectivamente. Si ahora denoto al valor de verdad de *A* con wA, valen las siguientes relaciones:

$$w(AB) = \min(wA, wB), \quad w(A+B) = \max(wA, wB), \quad \text{y} \quad w\overline{A} = 1 - wA.$$

Es así que llegamos al siguiente problema puramente aritmético.

$A, B, C,...$ son funciones de un número finito de argumentos; pueden tomar únicamente los valores 0 y 1. Además, *U* es una función construida desde $A, B, C,...$ (éstas estando escritas con ciertos argumentos) por medio de las operaciones $\min, \max,$ y $1-$; los argumentos son $x_1, x_2,..., z_1, z_2,..., f_1(x_1, x_2,...),..., g_1(x_1, x_2,..., z_1, z_2,...),....$ Ya que todas las secuencias de argumentos mencionadas arriba vienen a ser sucesivamente sustituidas por $x_1, x_2,..., z_1, z_2,...,$ el punto es asignar valores a $A, B, C,...$ de un modo tal que *U* tome el valor 1 para cada secuencia de argumentos.

Primero, ponemos 0 por $x_1, x_2,..., z_1, z_2,....$ Quizá en este punto ya sea imposible asignar valores a $A, B, C,...$ de un modo tal que $U = 1$. En ese caso, la proposición de primer orden no es satisfacible; hay una contradicción. Si no, existen algunas elecciones de valores para $A, B, C, ...$ tales que U tendrá el valor 1.[2] A estas posibilidades las llamo soluciones del primer nivel. Después tenemos que insertar todas las secuencias de argumentos del primer nivel. Quizá en este punto sea imposible elegir valores para $A, B, C, ...$ de un modo tal – los valores para las distintas secuencias de argumentos deben elegirse, desde luego, en concordancia unos con otros siempre que estas secuencias tengan símbolos en común – que U siempre será $=1$; si es así, tenemos una contradicción. Si no, de nuevo debe haber algunas posibilidades disponibles; las llamo soluciones del segundo nivel. Cada solución del segundo nivel es la continuación de una solución del primer nivel, en el sentido de que contiene tal solución en ella. Continuamos indefinidamente de esta manera. La cuestión importante ahora es si hay soluciones de un nivel arbitrariamente alto o si para un cierto *n* no existe solución del *n*-ésimo nivel. En el último caso, la proposición de primer orden dada contiene una contradicción. En el primer caso, por otra parte, es consistente. Lo que sigue aclarará esto. Cada consecuencia del axioma resulta de usos repetidos y combinados de él. Cada teorema derivado puede, por tanto, formularse como una proposición formada por medio de las funciones $A, B, C, ...$, y en estas funciones ocurrirán, por un lado, símbolos indeterminados $a, b, c, ...$ y, por el otro, símbolos adicionales que han sido obtenidos desde éstos por sustituciones posiblemente repetidas en las expresiones funcionales $f_1, f_2, ..., g_1, g_2, ...$ Cada proposición así debe, no obstante, conservar su validez cuando $a, b, c, ...$ sean todos reemplazados por 0. Así, si una contradicción es derivable, debe ser demostrable una contradicción en la que ocurran tanto 0 como los símbolos obtenidos a partir de 0 por sustituciones en $f_1, f_2, ..., g_1, g_2, ...$ hasta, digamos, el *n*-ésimo nivel. Por lo tanto, no puede existir ninguna solución del *n*-ésimo nivel.

Para estar seguros, este procedimiento es infinito; pero hay algunos casos en los que es posible hacer finito al procedimiento. Por ejemplo, esté dada una proposición de primer orden de la forma

$$\prod_x \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_n} U(x, y_1, ..., y_n).$$

[2] Es conveniente escribir U como una alternación de términos construidos por medio de la negación y la conjunción (expansión booleana).

Aquí, en lugar de $f_1(0), f_2(0),..., f_n(0),$ simplemente escribo $1, 2,..., n;$ en lugar de $f_1(1),..., f_n(1),$ escribo $n+1,..., 2n;$ en lugar de $f_1(2),..., f_n(2),$ escribo $2n+1,..., 3n;$ y así sucesivamente hasta que, en lugar de $f_1(n),..., f_n(n),$ escribo $n^2+1,..., n^2+n.$ Primero, sea 0 sustituido por *x* y por tanto $1, 2,..., n$ por $y_1, y_2,..., y_n,$ respectivamente; entonces los valores que pueden elegirse para $A, B, C,...$ como para hacer que $U=1$ producirán, cuando son tomados juntos, ciertas alternativas $\mathfrak{U}_1(0, 1,…, n),…, \mathfrak{U}_N(0, 1,…, n)$. Cuando en el siguiente paso los valores $1, 2,..., n$ son sustituidos por *x*, las únicas posibilidades que entonces tenemos son aquellas que resultan cuando una alternativa $\mathfrak{U}_i$ (0, 1,…, *n*) es compatible, para cada *r* en la secuencia $1, 2,..., n$, con al menos una de las alternativas $\mathfrak{U}_j$ (*r*, *rn* + 1,…, (*r* +1)*n*). Sean $\mathfrak{U}_i'(0, 1,…, n)$ aquellas de las alternativas $\mathfrak{U}_i(0, 1,…, n)$ para las que esto es el caso. Si la continuación al siguiente nivel es posible, las únicas alternativas $\mathfrak{U}_j(r, rn + 1,…, (r + 1)n)$ que tienen que ser consideradas son las $\mathfrak{U}_j'(r, rn + 1,…, (r + 1)n)$. Ahora, de nuevo, sean $\mathfrak{U}_i''(0, 1,…, n)$ aquellas que, de entre las alternativas $\mathfrak{U}_i'(0, 1,…, n)$, son compatibles, para $r=1, 2,..., n,$ con al menos una de las alternativas $\mathfrak{U}_j'(r, rn + 1,…, (r + 1)n)$. Entonces únicamente las $\mathfrak{U}_j''(r, rn + 1,…, (r + 1)n)$ tendrán que ser consideradas, y sean $\mathfrak{U}_i'''(0, 1,…, n)$ aquellas que, de entre las alternativas $\mathfrak{U}_i''$, son compatibles, para $r=1, 2,..., n,$ con al menos una de las alternativas $\mathfrak{U}_j''(r, rn + 1,…, (r + 1)n)$. Y así sucesivamente. Ya que sólo un número finito de alternativas está disponible, este proceso debe realmente terminar; esto es, después de un número finito de pasos llegamos a un número *s* tal que las alternativas $\mathfrak{U}_i^{(s+1)}$ son las mismas que las $\mathfrak{U}_i^{(s)}$. Puede ser que, en este punto, no esté disponible ninguna alternativa más; en ese caso, la proposición de primer orden dada es contradictoria. Pero, si hay al menos una alternativa $\mathfrak{U}_i^{(s)}$, la proposición de primer orden es consistente. Porque entonces reconocemos que es posible, para cada nueva secuencia de argumentos de las variables individuales $x, y_1,..., y_n,$ que formen una alternativa correspondiente $\mathfrak{U}_h^{(s)}(x, y_1,…, y_n)$ que sea consistentemente compatible con las alternativas $\mathfrak{U}^{(s)}$ establecidas para las anteriores secuencias de argumentos. Que esto sea tan simple aquí se debe al hecho de que una secuencia de argumentos R_n, del n-ésimo nivel, que no ocurra ya en el $(n-1)$-ésimo nivel tiene un elemento en común únicamente con una sola secuencia de argumentos R_{n-1}, del $(n-1)$-ésimo nivel, si ignoramos las secuencias de argumentos de niveles por encima del n-ésimo. Por lo tanto, la determinación de las funciones $A, B, C, \ldots$ para R_n es independiente de la determinación de estas funciones para todas las secuencias de argumentos anteriores, con la única excepción de R_{n-1}.

Ejemplo 1. Investiguemos si la proposición de primer orden

$$\prod_x \sum_y (A(x,y) + A(x,x)\overline{A(y,y)})$$

es o no es contradictoria. Aquí podemos poner 1 por y si se pone 0 por x, y en general $n+1$ por y cuando n se ponga por x.

En la formulación aritmética, el problema es: investigar si es posible determinar la función $A(x,y)$, cuyos valores deben restringirse a 0 y 1, de un modo tal que para todo n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\max(A(n,n+1),\ \min(A(n,n),\ 1 - A(n+1,n+1))) = 1.$$

Aquí, las alternativas $\mathfrak{U}_i(0, 1)$ son estas dos:

$$\mathfrak{U}_1(0, 1): A(0, 1) = 1; \mathfrak{U}_2(0, 1): A(0, 0) = 1, A(1, 1) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{U}_1(1, 2): A(1, 2) = 1; \mathfrak{U}_2(1, 2): A(1, 1) = 1, A(2, 2) = 0.$$

Así, aquí $\mathfrak{U}_1(0, 1)$ es compatible tanto con $\mathfrak{U}_1(1, 2)$ como con $\mathfrak{U}_2(1, 2)$, mientras que $\mathfrak{U}_2(0, 1)$ es compatible únicamente con $\mathfrak{U}_1(1, 2)$. Pero, ya que ambas $\mathfrak{U}_i(0, 1)$ se pueden continuar y al mismo tiempo ambas $\mathfrak{U}_i(1, 2)$ pueden ocurrir como continuaciones, en este punto las $\mathfrak{U}_i´$ ya coinciden con las $\mathfrak{U}_i$. Por lo tanto, la proposición dada es consistente. En efecto, desde ya obtenemos una solución del problema aritmético si establecemos $A(n, n+1) = 1$ para todo n, sin importar qué valores tenga, por lo demás, la función.

Ejemplo 2. Examinemos si la proposición de primer orden

$$\prod_x \sum_y (A(x,y)B(x)\overline{B(y)} + A(x,x)\overline{A(y,y)}\overline{B(y)})$$

es o no es consistente. Aquí obtenemos

$$\mathfrak{U}_1(0, 1)\text{: } A(0, 1) = 1, B(0) = 1, B(1) = 0,$$

$$\mathfrak{U}_2(0, 1)\text{: } A(0, 0) = 1, A(1, 1) = 0, B(1) = 0$$

como alternativas del primer nivel. Por lo tanto

$$\mathfrak{U}_1(1, 2)\text{: } A(1, 2) = 1, B(1) = 1, B(2) = 0,$$

$$\mathfrak{U}_2(1, 2)\text{: } A(1, 1) = 1, A(2, 2) = 0, B(2) = 0.$$

Aquí, $\mathfrak{U}_1(0, 1)$ es compatible con $\mathfrak{U}_2(1, 2)$ pero no con $\mathfrak{U}_1(1, 2)$; $\mathfrak{U}_2(0, 1)$ no se puede continuar en absoluto. Así, sólo hay una $\mathfrak{U}_1´(0, 1)$, a saber, $\mathfrak{U}_1(0, 1)$; pero no ocurre ninguna $\mathfrak{U}_i´´$ en absoluto. Por tanto, la proposición contiene una contradicción.

Hay algunas otras proposiciones en forma $\prod\sum$ que pueden ser tratadas de un modo exactamente análogo.[3] Sea

$$\prod_{x_1} \cdots \prod_{x_m} \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_n} U(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$$

tal proposición de primer orden *Z*. Ésta puede escribirse de un modo tal que sólo necesitemos tomar en consideración *distintos* elementos *x*. Ese es inmediatamente el caso si

[3] Antes demostré (*1920*) que el problema de si una proposición de primer orden ***Z*** es o no es satisfacible puede reducirse a la misma cuestión para una proposición de primer orden ***Z*** ´ en forma $\prod\sum$.

la verdad de *U* para dos *x* idénticos siempre se sigue de la verdad de *U* para distintos *x*; de otra manera, podemos transformar la proposición. Sean $x_1, ..., x_m$ *m* individuos distintos; sean $\xi_1^{(t)}, ..., \xi_m^{(t)}, t = 1, 2, ..., m^m$, las distintas permutaciones con repeticiones de estos individuos tomados *m* a la vez. De acuerdo con la proposición *Z*, existe entonces, para cada secuencia $\xi_1^{(t)}, ..., \xi_m^{(t)}$, una secuencia de individuos $y_1^{(t)}, ..., y_n^{(t)}$ tal que $U(\xi_1^{(t)}, ..., \xi_m^{(t)}, y_1^{(t)}, ..., y_n^{(t)})$ es verdadera. Ahora sea

$$V(x_1, ..., x_m, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}, ..., y_1^{(m^m)}, ..., y_n^{(m^m)}) \\ = U(\xi_1^{(1)}, ..., \xi_m^{(1)}, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) U(\xi_1^{(2)}, ..., \xi_m^{(2)}, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)}) ....$$

Entonces *Z* obviamente puede escribirse así:

$$\prod_{x_1,...,x_m} \sum_{y_1^{(1)}} \cdots \sum_{y_n^{(m^m)}} V(x_1, ..., x_m, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(m^m)}),$$

donde ahora solamente las diversas *combinaciones* de individuos tomados *m* a la vez desde el dominio en cuestión han de ser sustituidas por $x_1, ..., x_m$. Por lo tanto, sólo necesitamos considerar proposiciones de la forma recién mencionada, por ejemplo,

$$\prod_{x_1,...,x_m} \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_n} U(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n).$$

Con el fin de investigar la satisfacibilidad, podemos primero sustituir los símbolos $1, 2, ..., m$ por $x_1, ..., x_m$ y los números $m+1, ..., m+n$ por $y_1, ..., y_n$; esto produce la secuencia de argumentos $1, 2, ..., m+n$ del primer nivel. Después, fórmense y ordénense (digamos lexicográficamente) todas las combinaciones de los números $1, 2, ..., m+n$ tomados *m* a la vez que difieren de la combinación $1, 2, ..., m$. A la primera combinación asignémosle los números $m+n+1, ..., m+2n$ como valores *y*; a la segunda asignémosle como valores *y* los números $m+2n+1, ..., m+3n$; y así sucesivamente. De esta forma obtenemos las secuencias de argumentos del segundo nivel. Después formemos todas las nuevas combinaciones de todos los números, tomados *m* a la vez, que hemos considerado hasta ahora (esto es, todas las combinaciones que todavía no han ocurrido como valores para los *x*); y así sucesivamente.

Ahora hago la asunción de que todas las funciones primitivas ocurriendo en nuestra proposición de primer orden poseen al menos *m* símbolos de argumentos distintos; entonces es posible decidir la cuestión de satisfacibilidad por un procedimiento finito. Esto se debe al hecho de que cada secuencia de argumentos del *v*-ésimo nivel tiene, si descartamos secuencias de argumentos de niveles mayores, un sistema de argumentos $a_1,...,a_m$ en común con sólo una sola secuencia de argumentos del $(v-1)$-ésimo nivel.

Sean $\mathfrak{A}_i(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)$ las alternativas que son posibles para la secuencia de argumentos $a_1,...,a_m,b_1,...,b_n$, donde todos los *a* y *b* son símbolos distintos. Además, sea la secuencia $c_1,...,c_m$ cualquiera de las combinaciones, de los símbolos $a_1,...,a_m,b_1,...,b_n$ tomados *m* a la vez, que son distintas de la combinación $a_1,...,a_m$; con cada combinación tal asociamos una secuencia $d_1,...,d_n$ de *n* símbolos distintos de un modo tal que las secuencias $d_1,...,d_n$ y $d_1',...,d_n'$ que corresponden a dos combinaciones distintas $c_1,...,c_m$ sean *completamente* distintas y que todos los *d* sean distintos de todos los *a* y *b*. Entonces tenemos que elegir del conjunto de alternativas $\mathfrak{A}_i(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)$ aquellas $\mathfrak{A}_i'(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)$ que, para cada combinación $c_1,...,c_m$, sean compatibles con al menos una de las alternativas $\mathfrak{A}_j(c_1,...,c_m,d_1,...,d_n)$; elegir de entre estas alternativas $\mathfrak{A}_i'$ de nuevo las $\mathfrak{A}_i''(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)$ que, para cada combinación $c_1,...,c_m$, sean compatibles con al menos una de las alternativas $\mathfrak{A}_j'(c_1,...,c_m,d_1,...,d_n)$; y así sucesivamente. Justo como antes, llegamos a un número *s* tal que las alternativas $\mathfrak{A}_i^{(s+1)}$ coinciden con las $\mathfrak{A}_i^{(s)}$. Si en este punto existen alternativas $\mathfrak{A}_i^{(s)}$, la proposición dada es consistente; de otro modo representa una contradicción.

Ofrezco un ejemplo sencillo. Asúmase que en la proposición

$$\prod_{x_1}\prod_{x_2}\sum_{y}U(x_1,x_2,y)$$

$U(x_1,x_2,y)$ tiene la siguiente forma:

$$A(x_1,x_2)A(x_1,y)\overline{A(x_2,y)}+A(x_2,x_1)A(x_2,y)\overline{A(x_1,y)}+$$
$$A(x_1,y)\overline{A(y,x_2)}+A(x_2,y)\overline{A(y,x_1)}+A(x_1,y)\overline{A(y,x_1)}+A(x_2,y)\overline{A(y,x_2)}.$$

Ya que $U(x_1,x_2,y)$ es simétrica con respecto a x_1 y x_2, y $U(x_1,x_1,y)U(x_2,x_2,y)$ está contenida en $U(x_1,x_2,y)$, la proposición dada puede enseguida escribirse en la forma

$$\prod_{x_1,x_2}\sum_{y}U(x_1,x_2,y),$$

donde el par (x_1,x_2) debe correr a través de todos los pares desordenados del dominio considerado. Aquí 1, 2, 3 es la secuencia de argumentos del primer nivel; las secuencias de argumentos del segundo nivel son 1, 3, 4 y 2, 3, 5. Una de las alternativas $\mathfrak{A}_i(1,2,3)$ aquí es $\mathfrak{A}_1(1,2,3)$, que significa $A(1,3)=1$ y $A(3,2)=0$. Esta alternativa es compatible con $\mathfrak{A}_1(1,3,4)$, es decir, $A(1,4)=1$ y $A(4,3)=0$, así como con $\mathfrak{A}_1(2,3,5)$, es decir, $A(2,5)=1$ y $A(5,3)=0$. Esto inmediatamente prueba la consistencia.

Si por otro lado estuviese dada la proposición

$$\prod_{x_1}\prod_{x_2}\sum_{y}A(x_1,y)\overline{A(y,x_2)},$$

entonces, por la regla de transformación explicada arriba, se convertiría en

$$\prod_{x_1,x_2}\sum_{y_1}\sum_{y_2}\sum_{y_3}\sum_{y_4}[A(x_1,y_1)\overline{A(y_1,x_2)}A(x_2,y_2)\overline{A(y_2,x_1)}$$
$$A(x_1,y_3)\overline{A(y_3,x_1)}A(x_2,y_4)\overline{A(y_4,x_2)}].$$

Podemos entonces mostrar la consistencia de esta proposición por el método sistemático; pero es más sencillo mostrar la consistencia de la proposición dada al elegir, para cada par (x_1,x_2), un y mayor que x_1 y x_2, y al tomar, en general, $A(x,y)=1$ siempre que $x<y$ pero $A(x,y)=0$ siempre que $x\geq y$.

Si todas las funciones primitivas de la proposición $\Pi\Sigma$

$$\prod_{x_1}\prod_{x_2}\cdots\prod_{x_m}\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_n}U(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$$

tienen al menos $m+1$ distintos símbolos de argumentos, la proposición es consistente si y sólo si U es consistente. Pues las distintas secuencias de argumentos que obtenemos mediante el procedimiento aplicado en las páginas 13-14 nunca tienen más de m símbolos en común, de modo que se asignan valores a las funciones primitivas para cada una de las secuencias de argumentos, a medida que aparecen sucesivamente, independientemente de todas las otras.

Desde luego, es posible proponer problemas adicionales relativos a las proposiciones de primer orden. Una cuestión interesante es si un axioma, o un sistema de axiomas, dado como una proposición de primer orden Z es *categórico*; decimos que Z es categórica si es posible mostrar, para una arbitraria proposición de primer orden Z' formada por medio de las mismas funciones primitivas que Z, que es verdadera o falsa.[4] Recientemente (*1926*, *1926a*) C. H. Langford ha ofrecido algunos ejemplos de tales sistemas axiomáticos categóricos. De esto, me gustaría ofrecer un ejemplo muy sencillo pero, no obstante, no demasiado trivial. Considero los siguientes axiomas:

1. $\sum_x R(x,x)$,
2. $\prod_x \prod_y (R(x,y)+R(y,x))$,
3. $\prod_x \prod_y \prod_z (\overline{R(x,y)}+\overline{R(y,z)}+R(x,z))$,
4. $\prod_x \sum_y \overline{R(x,y)}$,
5. $\prod_x \sum_y \overline{R(y,x)}$,
6. $\prod_x \prod_y \sum_z (R(x,y)+\overline{R(x,z)}\,\overline{R(z,y)})$.

Si escribimos $I(x,y)$ por $R(x,y)R(y,x)$, reconocemos, a cuenta de 3, que $\Phi(y)$ siempre se sigue de $I(x,y)\Phi(x)$, donde Φ es una arbitraria función proposicional de primer orden que puede formarse desde R, e igualmente que $\Phi(x)$ se sigue de $I(x,y)\Phi(y)$. Por lo tanto, la función proposicional I merece ser llamada "identidad" en el dominio de las proposiciones de primer orden derivables de R. Ya que x e y ya no se distinguen cuando se

[4] Incidentalmente, la palabra "categórico" también se utiliza en otro sentido.

sostiene $I(x,y)$, es fácil ver que los axiomas listados determinan un ordenamiento de todos los individuos en una secuencia abierta y densa.

Consideremos ahora la expresión

$$\sum_y U(x_1, x_2, ..., x_n, y),$$

donde U es una función proposicional elemental formada desde R. Mostraré que esta expresión, en virtud de los axiomas, siempre es equivalente a una función proposicional elemental $V(x_1, ..., x_n)$, esto es, que ambas siempre tienen el mismo valor de verdad. Con el fin de mostrar eso, por supuesto que sólo necesito considerar el caso en el que U está construida únicamente por medio de la negación y la conjunción. Además, conyuntos proposicionales como $R(x_i, x_j)$ pueden ser movidos a la izquierda del signo $\sum_y$. Si ocurre el conyunto proposicional $\overline{R(y,y)}$, la proposición siempre es falsa. Si ocurre el conyunto $R(y,y)$, puede ser omitido ya que, a cuenta de 2, siempre es verdadero. Si permitimos que $\alpha_1, ..., \alpha_\mu, \beta_1, ..., \beta_\nu, \gamma_1, ..., \gamma_\rho, \delta_1, ..., \delta_\sigma$ denoten los x que tienen lugar en U, obtenemos

$$\sum_y R(\alpha_1, y)...R(\alpha_\mu, y)R(y,\beta_1)...R(y,\beta_\nu)\overline{R(\gamma_1, y)}...\overline{R(\gamma_\rho, y)}\,\overline{R(y,\delta_1)}...\overline{R(y,\delta_\sigma)}.$$

$R(\alpha,\beta), \overline{R(\gamma,\alpha)}, \overline{R(\beta,\delta)}$, y $\overline{R(\gamma,\delta)}$ se siguen de esta proposición para toda α, β, γ, y δ. Afirmo que, a la inversa, la verdad de la proposición $\sum_y$ se sigue de la conjunción de todos los $R(\alpha,\beta), \overline{R(\gamma,\alpha)}, \overline{R(\beta,\delta)}$, y $\overline{R(\gamma,\delta)}$. Pues podemos imaginar que los subíndices de las letras se eligen de tal modo que $R(\alpha,\alpha_1)$ valga para toda α, e igualmente $R(\beta_1,\beta)$ para toda β, $R(\gamma_1,\gamma)$ para toda γ, y $R(\delta,\delta_1)$ para toda δ. Ahora son posibles cuatro casos: (1) Tenemos $R(\alpha_1,\delta_1)R(\gamma_1,\beta_1)$. Como $\overline{R(\gamma_1,\delta_1)}$ se sostiene, existe, por 6, un y tal que se obtiene $\overline{R(y,\delta_1)}\,\overline{R(\gamma_1,y)}$, de donde fácilmente podemos derivar la verdad de la proposición $\sum_y$. (2) $R(\alpha_1,\delta_1)\overline{R(\gamma_1,\beta_1)}$ se sostiene. Entonces la proposición $\sum_y$ ya se sostiene si sustituimos β_1 por *y*. (3) Tenemos $\overline{R(\alpha_1,\delta_1)}R(\gamma_1,\beta_1)$. Entonces la proposición $\sum_y$ se sostiene si sustituimos α_1 por *y*. (4) $\overline{R(\alpha_1,\delta_1)}\,\overline{R(\gamma_1,\beta_1)}$ se sostiene. Si $R(\beta_1,\alpha_1)$ es verdadero, la proposición $\sum_y$ vale si α_1 o β_1 es sustituida por *y*. Si $\overline{R(\beta_1,\alpha_1)}$ es verdadero, existe un *y* tal que se obtiene $\overline{R(\beta_1,y)}\,\overline{R(y,\alpha_1)}$, y de esto se sigue la verdad de la proposición $\sum_y$.

Es fácil descubrir lo que puede responderse en los casos más simples en los que no ocurren las cuatro de las secuencias $\alpha,\beta,\gamma,$ y δ.

Por lo tanto, cualquier función proposicional $\sum_y U(x_1,...,x_n,y)$ es falsa para toda *x*, verdadera para toda *x*, o ciertamente reemplazable por una función elemental $V(x_1,...,x_n)$. Si utilizamos la negación, vemos que lo mismo vale para $\prod_y U(x_1,...,x_n,y)$. En consecuencia, las variables aparentes ocurriendo en una arbitraria proposición de primer orden pueden ser eliminadas gradualmente. Cuando han sido eliminadas todas excepto una, la última eliminación produce directamente el resultado “verdadero” o “falso”.

Por este medio, espero haber ofrecido un poco de conocimiento sobre algunos de los problemas más importantes de la lógica matemática.