Un método para decidir si un teorema matemático es analítico o sintético

Por

Emilio Méndez Pinto

[Las ideas de este trabajo derivan de un ensayo de Russell titulado *¿Es la matemática puramente lingüística?*][1]

Decimos que un teorema matemático T es analítico si:

1) De T se deduce un teorema U que repite a T (o parte de T) en otros términos y la verdad de T resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

Diremos que 1) es la condición necesaria para la analiticidad de T.

Decimos que un teorema matemático T es analítico si:

2) De T se deduce una serie de teoremas $U, V, W, ...$ que repiten a T (o parte de T) en otros términos y la verdad de T resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

Para que 2) sea una condición necesaria y suficiente para la analiticidad de T (es decir, para que sea una condición de la forma "si y sólo si"), debe ser el caso que $U = V, U = W, V = W, ...$.

Entonces decimos que un teorema matemático T es analítico si y sólo si:

3) De T se deduce una serie de teoremas $U, V, W, ...$ tales que $T = U, T = V, T = W, ...$ y tales que $U = V, U = W, V = W, ...$ y la verdad de T resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

En 3), la condición de que $T = U, T = V, T = W, ...$ cumple el propósito de la repetición de T en otros términos, mientras que la condición de que $U = V, U = W, V = W, ...$ garantiza la analiticidad de T asumiendo que las condiciones expuestas en 2) sean condiciones necesarias para la analiticidad de T. Si no se cumple que $U = V, U = W, V = W, ...$, entonces T no es un teorema analítico, incluso si se cumplen las condiciones expuestas en 2).

[1] Russell, Bertrand, *Análisis filosófico*, Ediciones Paidós, España (1999), pp. 113-127.

En efecto, no es difícil imaginar casos en los que se cumple la primera condición (es decir, que $T = U, T = V, T = W, \ldots$) pero no la segunda (es decir, que $U = V, U = W, V = W, \ldots$). Considérese una fórmula con infinitas proposiciones,[2] como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. Si U es $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2 = \frac{1}{6} 5(5+1)(2 \times 5+1)$ y V es $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 = \frac{1}{6} 6(6+1)(2 \times 6+1)$ (es decir, tanto U como V repiten a T en otros términos), entonces tales deducciones cumplen con la primera condición *pero no con la segunda*, ya que inmediatamente se ve que $U \neq V$, es decir, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2 = \frac{1}{6} 5(5+1)(2 \times 5+1) = 55,$$

mientras que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 = \frac{1}{6} 6(6+1)(2 \times 6+1) = 91.$$

Por lo tanto, el teorema $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ no es analítico según las condiciones expuestas en 3).

Decimos que un teorema matemático T es sintético si sus respectivas deducciones $U, V, W, \ldots$ son tales que $U \neq V, U \neq W, V \neq W, \ldots$, *independientemente de si son tales que* $T = U, T = V, T = W, \ldots$. (Ya vimos que el teorema $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ es sintético porque, a pesar de que se cumple que $T = U, T = V, T = W, \ldots$, también se cumple que $U \neq V, U \neq W, V \neq W, \ldots$.)

Pero tampoco es difícil imaginar casos en los que la condición de que $U \neq V, U \neq W, V \neq W, \ldots$ no se cumple. En tales casos, si se cumple que $T = U, T = V, T = W, \ldots$, el teorema será analítico. Ejemplos de esto último son infinitos teoremas aritméticos con un número finito de proposiciones.

[2] Hilbert, David, *On the infinite*, en *From Frege to Gödel*, Harvard, EEUU (1967), p. 372.