

*Un modelo mínimo
para la teoría
de conjuntos*

Por

Paul J. Cohen

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: A MINIMAL MODEL FOR SET THEORY

© De la traducción: Emilio Méndez Pinto

Publicado originalmente en Bull. Amer. Math. Soc., volumen 69, número 4 (1963), 537-540. La American Mathematical Society otorgó los permisos para la traducción y publicación digital de esta obra.

Prohibida su reproducción por cualquier medio mecánico o eléctrico sin la autorización por escrito de los coeditores.

Comunicado por Paul R. Halmos el 22 de marzo de 1963

[El autor es miembro de la Fundación Alfred P. Sloan]

En la prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo y el axioma de elección con los otros axiomas de la teoría de conjuntos, Gödel [1] introdujo la noción de un conjunto constructible y mostró que los conjuntos constructibles forman un modelo para la teoría de conjuntos. Estos conjuntos son intuitivamente aquellos que pueden alcanzarse por medio de una secuencia transfinita de varias operaciones simples. Después mostró que el axioma de elección y la hipótesis del continuo valían en la colección de conjuntos constructibles. Si el universo original de conjuntos es suficientemente rico en números ordinales, se seguirá que cada conjunto es constructible, en cuyo caso decimos que el axioma de constructibilidad está satisfecho. Este axioma implica los dos axiomas previamente mencionados. Sin embargo, desde un punto de vista puede parecer que esta noción de constructibilidad no corresponde intuitivamente con lo que se quiere decir con constructivo, ya que puede suceder que todos los conjuntos en el universo sean constructivos. En este artículo mostramos que una noción más restringida de “construcción” producirá una clase de conjuntos que forman un modelo mínimo para la teoría de conjuntos. De esta manera probamos la consistencia de una forma más fuerte del axioma de constructibilidad. Observamos que la idea de una colección mínima de objetos satisfaciendo ciertos axiomas es bien conocida en las matemáticas; por ejemplo, en la teoría de grupos a menudo se considera el subgrupo generado por una colección de elementos, y en la teoría de la medida se definen los conjuntos de Borel como el más pequeño álgebra- σ de conjuntos conteniendo los conjuntos abiertos.

Trabajaremos dentro del marco de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (denotada por teoría de conjuntos Z-F); el rasgo característico de esta teoría es que el axioma de sustitución consiste en un número contable de enunciados, uno para cada relación definible $R(x, y)$, que dicen que si para algún conjunto fijo A y para todo x en A existe un único y tal que vale $R(x, y)$, entonces existe un conjunto B consistiendo en precisamente esos y . Ya que mucho de las pruebas de los teoremas que establecemos sigue muy de cerca a los argumentos de [1], seremos bastante breves.

Nuestro resultado principal es

TEOREMA 1. *Existe una colección de conjuntos que satisfacen la teoría de conjuntos Z-F y tal que cualquier otra colección así contiene una sub-colección isomorfa a ella.*

Aquí, nos referimos a que la relación $\in$ se toma como la habitual. Por un modelo bien fundado para la teoría de conjuntos nos referimos a uno para el que no existe una secuencia $\{a_n\}, a_n$ en el modelo tal que $a_{n+1} \in a_n$. Un modelo bien fundado siempre es isomorfo a un modelo de conjuntos reales. De este modo podemos replantear el Teorema 1 al decir que hay un modelo para la teoría Z-F que está contenido en cada modelo bien fundado. Una colección C de conjuntos es llamada *transitiva* si siempre que $x \in C$ y $y \in x$ entonces $y \in C$. Es claro que cada colección C de conjuntos es isomorfa (con respecto a $\in$) a una colección transitiva C' . A saber, defínase ϕ por inducción transfinita en el rango de x para todo $x \in C$, de modo que $\phi(x) = \{y \mid \exists z \in C, z \in x, \phi(z) = y\}$. Con esta observación, el Teorema 1 se sigue del Teorema 3 de abajo.

Sea T_0 cualquier colección transitiva de conjuntos conteniendo el conjunto de todos los enteros. Para cada ordinal $\alpha \geq 1$ definimos el conjunto T_α por inducción como sigue:

Establézcase $C_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$. Entonces:

- (1) Si x e y pertenecen a C_α , $\{x, y\}$ pertenece a T_α .
- (2) Si $x \in C_\alpha$, $z = \{y \mid \exists u (y \in u \in x)\}$ pertenece a T_α .
- (3) Si $x \in C_\alpha$, $z = \{y \mid y \subseteq x, y \in C_\alpha\}$ pertenece a T_α .
- (4) Si $R(a, b)$ es cualquier condición sobre conjuntos a, b construidos desde los símbolos lógicos y desde conjuntos en C_α , y si para algún x fijo en C_α , y todo y en x , existe un único z en C_α , tal que $R(y, z)$ vale cuando todos los cuantificadores en R están restringidos a C_α , entonces el conjunto de todos tales $z \in T_\alpha$.
- (5) Únicamente los conjuntos descritos en (1) hasta (4) pertenecen a T_α .

Es fácil ver que T_α son una secuencia creciente de conjuntos.

Observamos que esto difiere de la definición de Gödel de conjuntos constructibles sólo en que nosotros no requerimos que C_α pertenezca a T_α .

A la unión M de todo T_α para todos los ordinales α la llamamos el modelo mínimo generado por T_0 .

TEOREMA 2. *M es un modelo para la teoría de conjuntos Z-F.*

PRUEBA. Precisamente como en [1].

TEOREMA 3. *Si M' es cualquier colección transitiva de conjuntos tal que $T_0 \subseteq M'$ para la que vale la teoría de conjuntos Z-F, entonces $M' \supseteq M$.*

PRUEBA. Para cada ordinal α en M' , denótese con T'_α y C'_α los conjuntos formados dentro de M' por precisamente el mismo proceso por el que se forman T_α y C_α . Es claro que para α en M' , $T_\alpha = T'_\alpha$ y $C_\alpha = C'_\alpha$. Denote M'' la unión de todo C'_α para $\alpha \in M'$. Póngase

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{\alpha \mid C_{\alpha+1} \neq C_\alpha\}, \\ \Sigma' &= \{\alpha \mid \alpha \in M', C'_\alpha \neq C'_{\alpha+1}\}.\end{aligned}$$

Tanto Σ como Σ' son claramente segmentos iniciales de ordinales. Afirmamos que $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Pues, de otro modo, para algún β en Σ , β es el supremo de Σ' , y por tanto $C_\beta = M''$. Ya que M'' es un modelo para la teoría de conjuntos Z-F, se sigue que las operaciones (1) hasta (4) no forman ningunos nuevos conjuntos cuando son aplicadas a C_β , y por lo tanto $C_{\beta+1} = C_\beta$ o $\beta \notin \Sigma$, una contradicción. De aquí que $T_\alpha \subseteq M'$ para todo α en Σ , y por tanto $M' \supseteq M$.

TEOREMA 4. *Si T_0 es contable, también lo es M .*

PRUEBA. Por el teorema de Skolem-Löwenheim hay un modelo contable de conjuntos conteniendo T_0 , así que el teorema se sigue desde el Teorema 3.

Denote M_0 el modelo M donde desde ahora se toma T_0 para ser meramente los enteros y el conjunto de todos los enteros. M_0 es entonces el modelo mínimo referido, y está contenido en cada modelo transitivo de conjuntos para la teoría Z-F. De la prueba del Teorema 3 se sigue que Σ está contenido en M_0 y así que, en M_0 , vale el siguiente axioma:

AXIOMA FUERTE DE CONSTRUCTIBILIDAD. *Para cada conjunto x , existe un ordinal α y $x \in T_\alpha$.*

Notamos que claramente hay sistemas en los que el axioma fuerte de constructibilidad falla, a saber, cualquier modelo incontable. También es fácil ver que la forma fuerte implica la forma habitual del axioma de constructibilidad.

Por último, añadimos una aplicación al problema de la independencia del axioma de elección.

TEOREMA 5. *Sea $R(x)$ cualquier condición construida desde los símbolos lógicos. Entonces, utilizando la teoría de conjuntos Z-F, es imposible probar que los conjuntos satisfaciendo $R(x)$ forman un modelo para la teoría de conjuntos Z-F y la negación del axioma de elección (o incluso la negación del axioma de constructibilidad).*

PRUEBA. Si tal prueba existiese, implicaría que el conjunto de x en M_0 satisfaciendo $R(x)$ en M_0 formaría tal modelo N . Podemos formar el modelo transitivo N' , que es isomorfo a N y que sigue siendo un submodelo de M_0 . Ya que M_0 es mínimo, $N' = M_0$, y así el axioma de constructibilidad vale en N . En el Teorema 5 permitimos la posibilidad de que la prueba de que el axioma de sustitución vale puede involucrar una prueba distinta para cada uno de los enunciados contables en ese axioma.

El Teorema 5 muestra que en algún sentido el problema de independencia del axioma de elección es más difícil que el de la consistencia, porque en el último caso la

relación $R(x)$ fue tomada para ser la de conjuntos constructibles y la prueba de que en esta colección de conjuntos valía el axioma de elección únicamente requería de la teoría Z-F. Desde luego, el Teorema 5 no imposibilita la construcción de tal modelo por medio de operaciones que van más allá de la teoría Z-F, por ejemplo, basadas en una enumeración de enunciados en la teoría Z-F y la verdad o falsedad de ésta.

Es sabido [2] que no existe ningún modelo mínimo para el análisis, i. e., una colección de conjuntos de enteros y satisfaciendo los axiomas del análisis que esté contenida en cada otra colección así. La dificultad parecería ser que no hay una única representación para ordinales en el análisis correspondiente a la representación estándar en la teoría de conjuntos. Sin embargo, las ideas anteriores también pueden aplicarse al análisis, y en este caso se obtienen los sistemas habituales del análisis ramificado, A_α . Precisamente como arriba, uno puede mostrar que su unión es un modelo para el análisis. Ya que la construcción puede llevarse a cabo dentro de un modelo contable para la teoría de conjuntos, es claro, como antes, que es un modelo contable. El hecho de que los A_α se detengan en un ordinal contable en realidad puede probarse en la teoría Z-F. Obsérvese que los A_α ciertamente se detienen para $\alpha = \omega_1$, el primer ordinal incontable. (Si tomamos ω_1 como el primer ordinal incontable en M_0 , inmediatamente vemos que los A_α definitivamente se detienen antes de que lo haga C_α .) Se puede utilizar el argumento de Skolem-Löwenheim para deducir que hay una secuencia creciente de ordinales contables $\beta_n, \beta = \text{Lim} \beta_n$, tal que en A_{β_n} y A_β todos los enunciados verdaderos siguen siendo verdaderos en A_{ω_1} . De esto se sigue que cualquier conjunto de enteros formado en A_β ya es idéntico a un conjunto formado en A_{β_n} para algún n . Por lo tanto, el proceso se detiene con A_β .

Queda por encontrar un modelo para el análisis que sea mínimo en alguna clase natural de modelos. En esta dirección Mostowski [3] ha introducido la noción de un modelo β , i. e., modelos en los que los ordinales contables corresponden a verdaderos bien-ordenamientos de los enteros. Sería interesante saber si en esta clase puede encontrarse un modelo mínimo, y cuál es la relación con el análisis ramificado.

Deseo agradecer al profesor Georg Kreisel y al profesor Solomon Feferman por muchas conversaciones estimulantes.

REFERENCIAS

1. K. Gödel, *The consistency of the Continuum Hypothesis*, Annals of Mathematics Studies No. 3, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.
2. R. V. Gandy, G. Kreisel y W. W. Tait, *Set existence*, Bull. Acad. Polon. Sci. **8** (1960), 577-582.
3. A. Mostowski, *Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof*, Infinitistic Methods, Proc. Sympos. Foundations Math., Varsovia, 1959, Pergamon Press, Oxford, 1961.

UNIVERSIDAD DE STANFORD